

Angewandte Feld- und Potentialtheorie

Teil 2

Numerische Feldberechnungen

Ausgabe 0.5, 3.4.2020
Autor: Stephan Rupp

Kontakt: stephan.rupp@srupp.de

Copyright: [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen.....	5
1.1. Berechnung Elektromagnetischer Felder.....	5
1.2. Die Methode der Finiten Elemente.....	5
1.3. Zwei geladene Kugeln.....	10
1.4. Helmholtz Spulen.....	12
2. Stationäre elektrische Strömungsfelder.....	14
2.1. Feldgleichungen.....	14
2.2. Stromdurchflossene Leiterplatte.....	15
2.3. Einschnürung im Leiter.....	16
2.4. Felder im Inneren und Äußeren des Leiters.....	17
3. Elektrostatische Felder.....	22
3.1. Feldgleichungen.....	22
3.2. Einfluss des Dielektrikums.....	24
3.3. Kugelkondensator.....	25
3.4. Hochspannungsdurchführung.....	27
4. Magnetische Felder.....	29
4.1. Feldgleichungen.....	29
4.2. Stromdurchflossener Leiter.....	31
4.3. Magnetischer Fluss.....	36
4.4. Magnetischer Kreis.....	38
5. Quasistationäre elektromagnetische Felder.....	40
5.1. Feldgleichungen.....	40
5.2. Stromverdrängung (Skin-Effekt).....	42
5.3. Transformator.....	43
5.4. Gekoppelte Spulen.....	50
5.5. Induktionsmaschine.....	53
5.6. Wirbelstrombremse.....	56
6. Elektromagnetische Wellenfelder.....	57
6.1. Feldgleichungen.....	57
6.2. Ebene Wellen.....	59
6.3. Mikrostreifenleiter.....	61
6.4. Wilkinson-Leistungsteiler.....	62
6.5. Dipolantenne.....	62
6.6. Dipolzeile.....	64
7. Seminararbeit.....	65

8. Themen für die Seminararbeit.....66

1. Grundlagen

1.1. Berechnung Elektromagnetischer Felder

Basis der Feldberechnungen sind die Maxwell Gleichungen, wie sie in Anhang A wieder-gegeben sind. Je nach Anwendungsfall können hierbei Vereinfachungen erfolgen, beispielsweise für:

- (1) stationäre elektrische Strömungsfelder (Leiter mit zeitlich konstantem Stromprofil)
- (2) elektrostatische Felder (durch stationäre Raumladungen erzeugt)
- (3) magnetostatische Felder (durch konstante Ströme erzeugt)
- (4) quasistationäre elektromagnetische Felder (langsame zeitliche Änderungen)
- (5) elektromagnetische Wellenfelder (allgemeiner Fall, Hochfrequenztechnik).

Feldberechnungen erfolgen aus den jeweils gültigen Gleichungen mit Hilfe der Potentiale. Die Vereinfachungen für die oben genannten Fälle finden Sie ebenfalls in Anhang A.

Zum Verständnis der Zusammenhänge wird auf das Lehrbuch [3] verwiesen. Arbeiten Sie dieses bitte vorab durch und bearbeiten Sie auch die Aufgaben aus der Aufgabensammlung. Dort erfolgt eine analytische Berechnung der Felder durch Methoden der Vektoranalyse. Diese Aufgabensammlung folgt der Darstellung im Lehrbuch [3] und ergänzt diese um numerische Feldberechnungen.

Die numerische Berechnungen erfolgen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente mit dem in [1] und [2] genannten Programm. Für Lehrzwecke lässt sich von der Web-Seite des Herstellers die kostenlose Student Edition des Programms laden. Die Verwendung erfordert eine Registrierung beim Hersteller. Installieren Sie das Werkzeug und arbeiten Sie bitte Kapitel 1 dieser Aufgabensammlung vor Beginn der Veranstaltung komplett durch.

Die in dieser Aufgabensammlung aufgeführten Beispiele dienen der Veranschaulichung der Theorie und sollen Sie in die Lage versetzen, eigenständig Feldberechnungen durchzuführen. Hierzu gehört die Erstellung der physikalischen Modelle, die Durchführung der Berechnung (Simulation), sowie die Analyse und Verarbeitung der Ergebnisse.

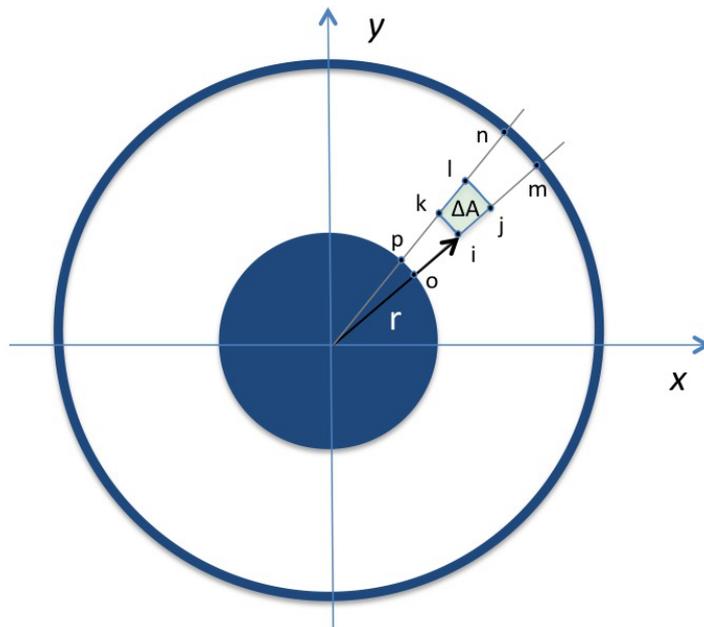
1.2. Die Methode der Finiten Elemente

Die eingesetzte numerische Methode beruht auf der Berechnung der Potentiale und Felder in diskreten Raumpunkten innerhalb eines zur Untersuchung ausgewählten Bereichs. Hierbei wird der Verlauf der Potentiale zwischen den Raumpunkten linear approximiert. Unter Vorgabe der Randwerte werden die Potentialwerte dann so errechnet, dass die potentielle Energie minimal wird. Diese Vorgabe orientiert sich an der physikalischen Beobachtung: Ein Wasserspiegel in einem vorgegebenen Gelände stellt sich schliesslich so ein, dass die potentielle Energie insgesamt minimal wird. Ähnlich verhalten sich elektrische Ladungen in einer vorgegebenen Anordnung.

Aufgabenstellung

Um die Methode zu veranschaulichen, wird eine einfache Aufgabenstellung gewählt. Die Aufgabe entspricht dem Beispiel aus [3]. Gegenüber dem Lehrbuch wurde der Lösungsweg durch die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems noch weiter auf das Wesentliche reduziert. Für den allgemeinen Fall (in kartesischen Koordinaten) wird auf das Lehrbuch verwiesen (siehe [3], Kapitel 10, Numerische Feldberechnungen).

Folgende Abbildung zeigt einen Querschnitt durch eine in der z-Achse symmetrische Anordnung bestehend aus einem Innenleiter mit dem Radius r_1 und einem Außenleiter mit dem Radius r_2 . Als Randbedingungen sind die Potentiale ϕ_{r_1} und ϕ_{r_2} des Innenleiters bzw Außenleiters gegeben. Gesucht ist die Potentialverteilung zwischen den beiden Leitern. Es wird angenommen, dass sich diese Potentialverteilung so einstellt, dass ein Minimum an potentieller Energie erreicht wird (vergleichbar dem Wasserstand, der sich in einem Gelände einstellt).



Potential des Segments

Zur Lösung der Aufgabe wird der Zwischenraum zwischen beiden Leitern mit einem willkürlichen Raster diskretisiert und das Potential pro Volumenelement des Rasters ermittelt. In den in der Abbildung gewählten Zylinderkoordinaten (r, θ, z) ermittelt man das Volumenelement

$$\Delta V = \Delta z \Delta A, \text{ wobei sich das Flächenelement } \Delta A \text{ zu}$$

$$\Delta A = r \Delta \theta \Delta r \text{ ermittelt.}$$

Gesucht ist nun das Potential $\phi(r, \theta, z)$ des Volumenelements. In den gewählten Zylinderkoordinaten reduziert sich diese Aufgabe auf $\phi(r)$.

Als Ansatz für das Potential der Fläche ΔA im gewählten Raster wählt man die lineare Funktion

$$\phi_{\Delta A}(r) = C_1 + C_2 r$$

Für die beiden Punkte i und j in der oben gezeigten Abbildung erhält man somit

$$\phi_{\Delta A}(r_i) = C_1 + C_2 r_i$$

$$\phi_{\Delta A}(r_j) = C_1 + C_2 r_j$$

Anders ausgedrückt, wird das Potential der gewählten Raumpunkte linear aus der gewählten Koordinate interpoliert:

$$\phi_{\Delta A}(r) = \phi_i N_i(r) + \phi_j N_j(r) \quad (1.1)$$

Hierbei bedeuten $N_i(r)$ und $N_j(r)$ Interpolationsfunktionen:

$$N_i(r) = \frac{r_j - r}{r_j - r_i} \quad (1.2)$$

$$N_j(r) = \frac{r_i - r}{r_i - r_j} \quad (1.3)$$

So ergibt sich das Potential im Punkt i zu $\phi_{\Delta A}(r_i) = \phi_i$ und das Potential im Punkt j zu $\phi_{\Delta A}(r_j) = \phi_j$. Dazwischen ergibt sich ein linearer Übergang zwischen diesen beiden Potentialen.

Energie des Segments

Die Energie des elektrischen Feldes im Raumpunkt \vec{r} berechnet sich zu

$$w_e(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon E^2(\vec{r})$$

Hierbei ist unter E der Betrag des Feldvektors $E = |\vec{E}|$ zu verstehen. Die Koordinaten können kartesisch bzw. in Zylinderkoordinaten wählt werden, d.h. $\vec{r} = (x, y, z)$ bzw. $\vec{r} = (r, \theta, z)$.

Die elektrische Feldstärke \vec{E} berechnet sich als Gradient des Potentials ϕ , wobei die Konvention hierbei ein negatives Vorzeichen verwendet:

$$\vec{E} = -\text{grad}(\phi(\vec{r}))$$

Für das Beispiel aus der Aufgabenstellung ergibt sich wegen der Symmetrie

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)$$

nur eine radiale Komponente $E(r) = E_r(r)$.

Für die Energie $W_{\Delta V}$ des Volumenelementes ΔV erhält man somit

$$\frac{W_{\Delta V}}{\Delta z \Delta \theta} = \frac{1}{2} \epsilon \int_{r_i}^{r_j} E^2(r) r \, dr = \frac{1}{2} \epsilon \int_{r_i}^{r_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2 r \, dr$$

Setzt man für das Potential ϕ des Elementes ΔV die lineare Approximation (1.1), (1.2) und (1.3) ein, so erhält man mit $\phi_{\Delta A}(r) = \phi_i N_i(r) + \phi_j N_j(r)$ für die partielle Ableitung $\frac{\partial \phi}{\partial r}$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \phi_i \frac{\partial N_i(r)}{\partial r} + \phi_j \frac{\partial N_j(r)}{\partial r}$$

Dieser Ausdruck berechnet sich nach Einsetzen von N_i und N_j gemäß (1.2) und (1.3) zu:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\phi_j - \phi_i}{r_j - r_i} = \frac{\Delta \phi}{\Delta r}$$

Das Ergebnis ist nicht weiter verwunderlich, da ja ein linearer Ansatz für das Potential gewählt wurde. Für die Energie im Volumenelement ΔV errechnet man hiermit:

$$\frac{W_{\Delta V}}{\Delta z \Delta \theta} = \frac{1}{2} \epsilon \int_{r_i}^{r_j} \left(\frac{\phi_j - \phi_i}{r_j - r_i}\right)^2 r \, dr = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{\phi_j - \phi_i}{r_j - r_i}\right)^2 \int_{r_i}^{r_j} r \, dr = \frac{1}{4} \epsilon (\phi_j - \phi_i)^2 \quad (1.4)$$

Die Energie des Knotenelementes (i, j) ist somit eine Funktion der Dielektrizitätskonstante ϵ und der Knotenpotentiale ϕ_i und ϕ_j

$$\frac{W_{\Delta V}}{\Delta z \Delta \theta} = f(\epsilon, \phi_i, \phi_j) \quad (1.5)$$

Minimalbedingungen

Soll die Energie für das betrachtete Volumenelement minimal werden, so gilt

$$f(\epsilon, \phi_i, \phi_j) = \min \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \phi_i} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \phi_j} = 0$$

d.h. die Gradienten des Funktionals $f(\epsilon, \phi_i, \phi_j)$ sind Null. Die beiden Ableitungen lassen sich mit Hilfe von (1.4) berechnen und führen auf ein Gleichungssystem

$$p_{2ii} \varphi_i + p_{2ij} \varphi_j = 0 \quad (1.6)$$

$$p_{2ji} \varphi_i + p_{2jj} \varphi_j = 0 \quad (1.7)$$

Hierbei bezeichnen p_{2ij} bis p_{2ji} die Koeffizienten des bisher betrachteten Segmentes 2 mit den Knoten i und j . Dieses Gleichungssystem ist alleine wenig aussagekräftig, da es nur die trivialen Lösungen $\varphi_i = \varphi_j$ besitzt. Erst bei Betrachtung im gesamten Zusammenhang der übrigen Volumenelemente im Raster ergibt sich ein zielführender Lösungsweg.

Die übrigen Segmente

Zur Erläuterung des Lösungsweges seien die beiden Segmente 1 (mit den Knoten o und i) und Segment 3 (mit den Knoten j und m) betrachtet. Für diese beiden Segmente erhält man sinngemäß folgende Gleichungssysteme:

Segment 1:

$$p_{1oo} \varphi_o + p_{1oi} \varphi_i = 0 \quad (1.7)$$

$$p_{1io} \varphi_o + p_{1ii} \varphi_i = 0 \quad (1.8)$$

Segment 3:

$$p_{3jj} \varphi_j + p_{3jm} \varphi_m = 0 \quad (1.9)$$

$$p_{3mj} \varphi_j + p_{3mm} \varphi_m = 0 \quad (1.10)$$

Insgesamt erhält man für die Potentiale φ_o , φ_i , φ_j , und φ_m das Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} p_{1oo} & p_{1oi} & 0 & 0 \\ p_{1io} & p_{1ii} + p_{2ii} & p_{2ij} & 0 \\ 0 & p_{2ji} & p_{2jj} + p_{3jj} & p_{3jm} \\ 0 & 0 & p_{3mj} & p_{3mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_o \\ \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_m \end{bmatrix} = 0$$

Randbedingungen

Im Beispiel werden das Potential auf dem Innenleiter φ_o und das Potential φ_m auf dem Aussenleiter vorgeben, z.B. $\varphi_o = 1$ V und $\varphi_m = 0$ V. Diese Größen sind somit keine Unbekannten mehr. Im oben angegebenen Gleichungssystem wären die Zeilen 1 und 4 zu streichen, und φ_o und φ_m in den verbleibenden Zeilen 2 und 3 auf die rechte Seite zu transformieren.

Im speziellen Fall erhält man das System:

$$\begin{bmatrix} p_{1io} & p_{1ii} + p_{2ii} & p_{2ij} & 0 \\ 0 & p_{2ji} & p_{2jj} + p_{3jj} & p_{3jm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_m \end{bmatrix} = 0$$

Sortiert man die Anteile der vorgegebenen Potentiale φ_o und φ_m nach rechts, so erhält man

$$\begin{bmatrix} p_{1ii} + p_{2ii} & p_{2ij} \\ p_{2ji} & p_{2jj} + p_{3jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{1io} & 0 \\ 0 & -p_{3jm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_o \\ \varphi_m \end{bmatrix}$$

Hieraus lassen sich nun die beiden Knotenpotentiale φ_i und φ_j berechnen.

Gleichungssystem

Im allgemeinen Fall mit den Koeffizienten q_{mn} erhält man nach Streichung der Zeilen 1 und 4:

$$\begin{bmatrix} q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_o \\ \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_m \end{bmatrix} = 0$$

Sortiert man die Randwerte φ_o und φ_m auf die rechte Seite, so ergibt sich das System

$$\begin{bmatrix} q_{22} & q_{23} \\ q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_{21} & -q_{24} \\ -q_{31} & -q_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_o \\ \varphi_m \end{bmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem ist nun numerisch lösbar. Man erhält die Potentiale $\phi(r)$ in den gewählten Punkten o, i, j und m (wobei o und m die vorgegebenen Randwerte darstellen). Die Genauigkeit der Berechnung ist abhängig von der Wahl eines hinreichend feinen Rasters der Knotenpunkte.

Zahlenbeispiel

Ausgangspunkt der Berechnung ist das Funktional für die Energie nach Gleichung (1.4):

$$\frac{W_{\Delta V}}{\Delta z \Delta \theta} = f(\varepsilon, \varphi_i, \varphi_j) = \frac{1}{4} \varepsilon (\varphi_j - \varphi_i)^2$$

Durch Ableitung erhält man für die Potentiale in Segment 2:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} = 0 = \frac{-1}{2\varepsilon} (\varphi_j - \varphi_i) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi_j} = 0 = \frac{1}{2\varepsilon} (\varphi_j - \varphi_i)$$

Hieraus ergeben sich die beiden Gleichungen für Segment 2:

$$\varphi_i - \varphi_j = 0 \tag{1.11}$$

$$-\varphi_i + \varphi_j = 0 \tag{1.12}$$

Sinngemäß erhält man für Segment 1 mit den Knoten o und i durch Ableitung nach φ_i :

$$-\varphi_o + \varphi_i = 0 \tag{1.13}$$

Für Segment 3 mit den Knoten j und m durch Ableitung nach φ_j :

$$\varphi_j - \varphi_m = 0 \tag{1.14}$$

Die Knotenpotentiale an o und m waren als Randbedingungen vorgeben: $\varphi_o = 1 \text{ V}$ und $\varphi_m = 0 \text{ V}$. Fasst man die Koeffizienten in einem Gleichungssystem für die Potentiale der Knoten o, i, j und m zusammen, so erhält man:

$$-\varphi_o + 2\varphi_i - \varphi_j = 0$$

$$-\varphi_i + 2\varphi_j - \varphi_m = 0$$

Durch Einsetzen von $\varphi_o = 1 \text{ V}$ und $\varphi_m = 0 \text{ V}$ erhält man hieraus

$$-1 \text{ V} + 2\varphi_i - \varphi_j = 0$$

$$-\varphi_i + 2\varphi_j = 0$$

Somit ergeben sich $\varphi_i = 2/3 \text{ V}$ und $\varphi_j = 1/3 \text{ V}$.

Analytische Lösung

Zwischen Innenleiter und Außenleiter gilt (siehe Anhang A, elektrostatische Felder):

$$\operatorname{div} D(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \varepsilon E(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) = 0 \text{ bzw.}$$

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0$$

Durch Bildung der Ableitungen in radialer Richtung (Zylinderkoordinaten) erhält man hieraus

$$\frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial^2 r} = 0$$

Für das elektrische Potential folgt hieraus:

$$\phi(r) = \int \frac{C_1}{r} dr + C_2$$

Mit den Randbedingungen $\phi(r_1) = 1 \text{ V}$ und $\phi(r_2) = 0 \text{ V}$ lassen sich die beiden Konstanten C_1 und C_2 berechnen (in Abhängigkeit der Radien r_1 und r_2):

$$\phi(r_1) = \int_{r_1}^{r_1} \frac{C_1}{r} dr + C_2 = C_1 \ln \frac{r_1}{r_1} + C_2 = 1 \text{ V}$$

$$\phi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C_1}{r} dr + C_2 = C_1 \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2 = 0 \text{ V}$$

Für die elektrische Feldstärke berechnet man aus dem Gradienten von $\phi(r)$

$$E(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial r} = \frac{-C_1}{r}$$

1.3. Zwei geladene Kugeln

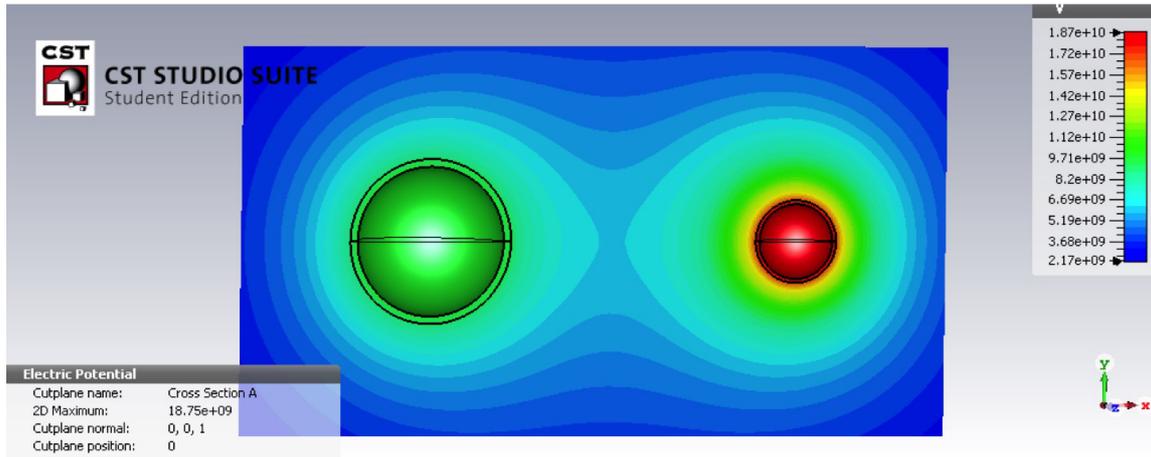
Eine einfache Anordnung besteht aus zwei ideal leitenden (metallischen) Kugeln, die auf ein elektrisches Potential gebracht werden, bzw. die mit elektrischen Ladungen aufgeladen werden. Dieses Beispiel folgt den Projektbeispielen zum CST Studio, zu finden unter [2].

Frage 1.3.1: Modellierung. Erstellen Sie eine Anordnung bestehend aus zwei ideal leitenden Kugeln (PEC Material für Perfect Electric Conductor) mit CST Studio. Folgen Sie hierzu den Anleitungen in [2]. Machen Sie sich mit der Software vertraut und variieren Sie das Beispiel gegebenenfalls.

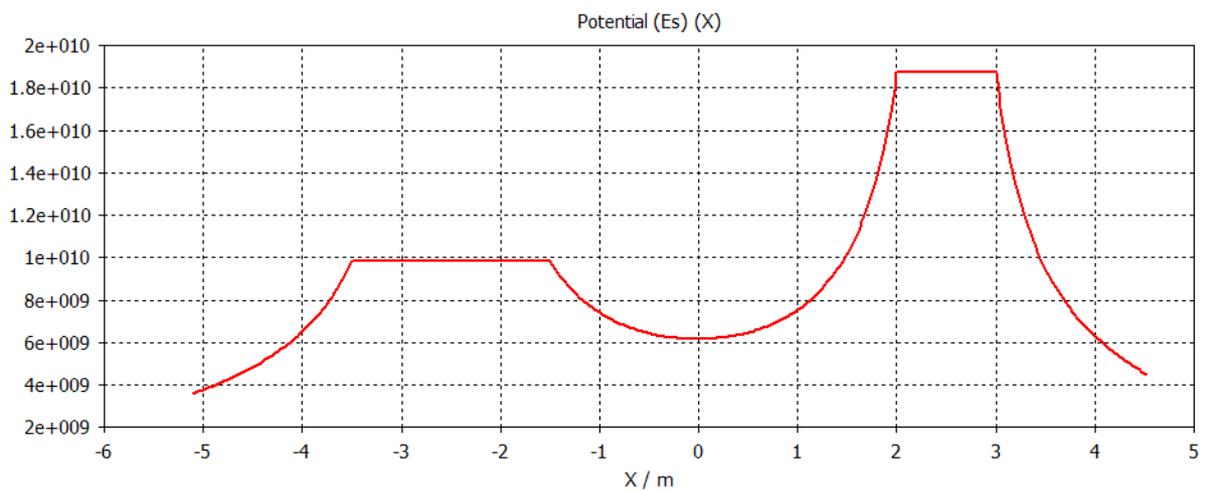
Frage 1.3.2: Simulation. Bringen Sie die beiden Kugeln auf ein gegebenes Potential bzw. laden Sie beide Kugeln elektrisch auf. Menüpunkt Background: Wählen Sie zur Vereinfachung der Simulation den zu simulierenden Bereich. Menüpunkt Boundary Conditions: Wählen Sie zur Vereinfachung der Simulation passende Symmetrieebenen. Raster-Einstellungen (Mesh): Folgen Sie den Anleitungen im Beispiel. Starten Sie die Simulation.

Frage 1.3.3: Auswertungen Potential (Postprocessing): Untersuchen Sie das elektrische Potential Ihrer Anordnung. Folgen Sie der Anleitung aus [2]. Machen Sie sich hierbei mit den unterschiedlichen Möglichkeiten zur Darstellung vertraut und testen Sie einige Optionen.

Lösungsbeispiel: Potentiallinien als Höhenlinien in der xy-Ebene mit $z=0$. Hier wurden unterschiedlich große Kugel verwendet und mit der gleichen Ladungsmenge aufgeladen.

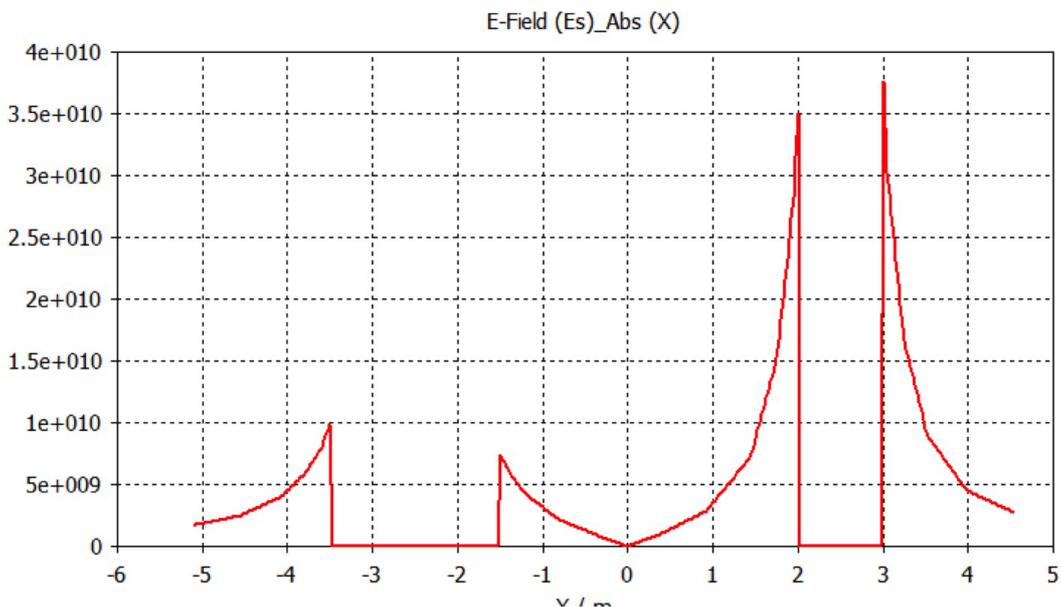


Lösungsbeispiel: eindimensionaler Plot des Potentials in x-Richtungen mit $y=0, z=0$

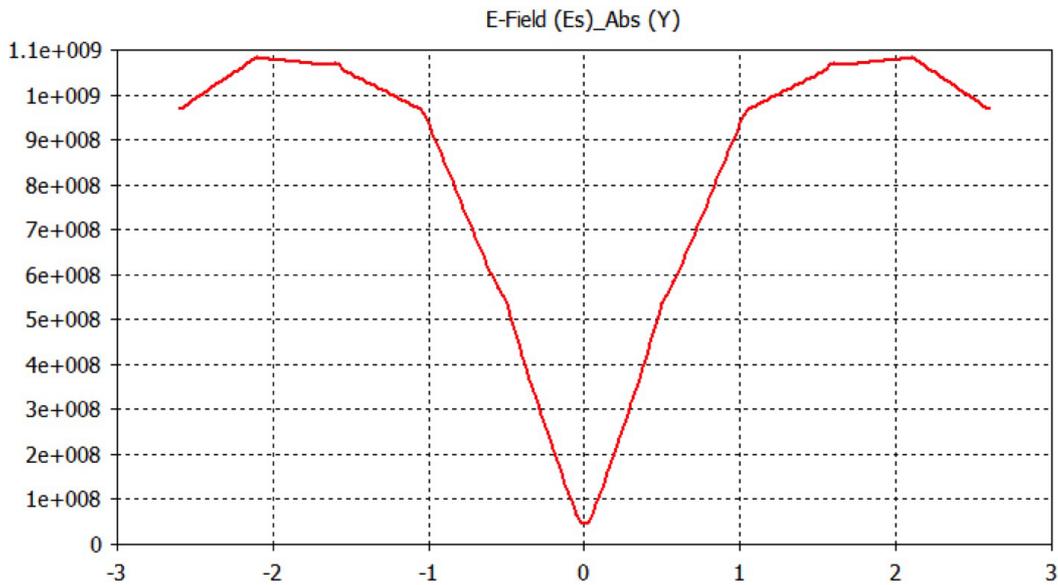


Frage 1.3.4: Auswertungen elektrische Feldstärke. Untersuchen Sie den Verlauf der elektrischen Feldstärke im Simulationsgebiet. Untersuchen Sie unterschiedliche Optionen zur Darstellung.

Lösungsbeispiel: eindimensionaler Plot der Feldstärke in x-Richtungen mit $y=0, z=0$:



Lösungsbeispiel: eindimensionaler Plot des Betrags der Feldstärke in y-Richtung mit $x=0, z=0$:



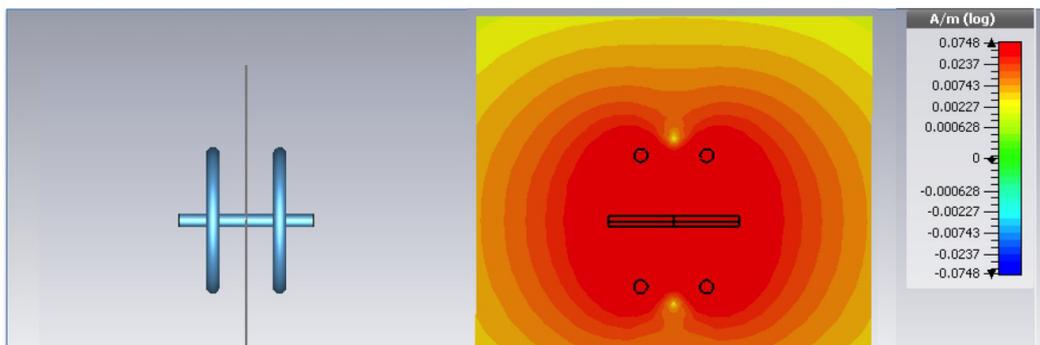
1.4. Helmholtz Spulen

Eine einfache Anordnung besteht aus zwei idealen Spulen, die parallel zueinander um ihr Zentrum angeordnet sind und in denen jeweils ein Strom zirkuliert. Dieses Beispiel folgt den Projektbeispielen zum CST Studio, zu finden unter [2].

Frage 1.4.1: Modellierung. Bauen Sie die Anordnung gemäß der detaillierten Anleitung unter [2] auf und erzeugen Sie die beiden Kreisströme. Definieren Sie den zu simulierenden Bereich und legen Sie zur Vereinfachung der Berechnung die Symmetrieebenen fest.

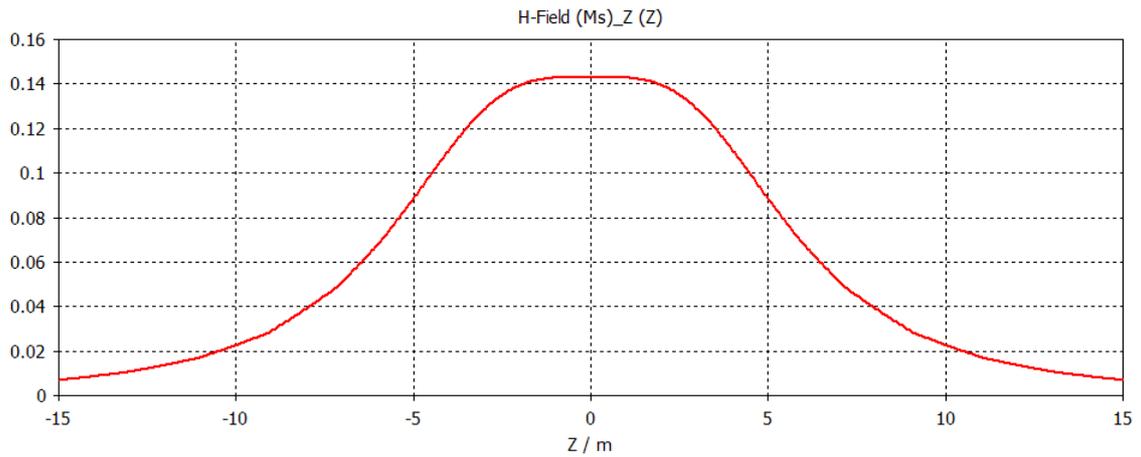
Frage 1.4.2: Simulation. Simulieren Sie die Anordnung mit Hilfe der magnetischen Berechnungsmethode (Magnetic Solver).

Lösungsbeispiel: Spulen und Magnetfeld (Betrag) in der yz-Ebene für $x=0$

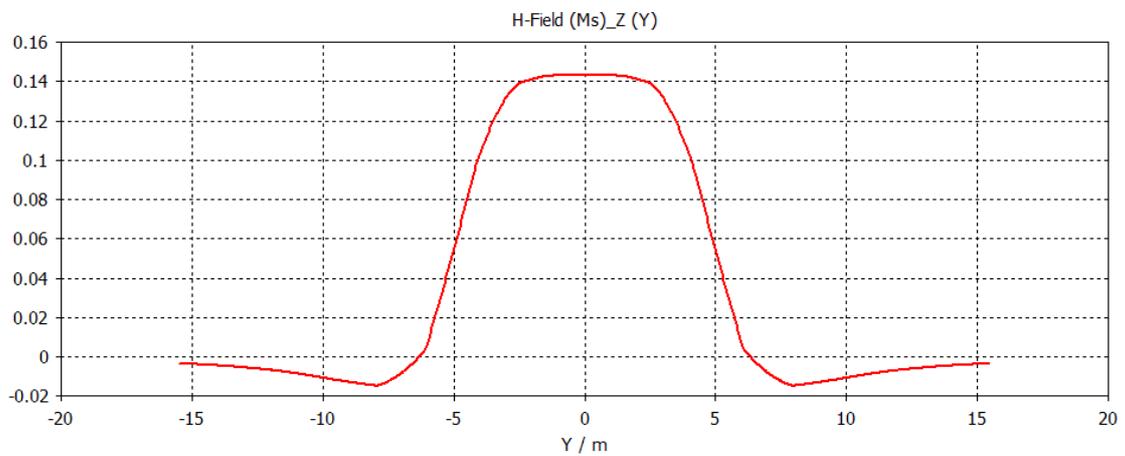


Frage 1.4.3: Auswertungen Magnetfeld. Untersuchen Sie die Ergebnisse der Simulation mit Hilfe geeigneter Methoden der Nachverarbeitung (Postprocessing), z.B. die magnetische Feldstärke entlang unterschiedlicher Wege.

Lösungsbeispiel: Betrag des Magnetfeldes $|H_z|$ in der Zylinderachse (z -Richtung, $x=0, y=0$)



Lösungsbeispiel: Stärke des Magnetfeldes H_z zwischen den Spulen (y-Richtung, $x=0$, $z=0$)



Frage 1.4.4: Eigene Auswertungen. Analysieren Sie die Ergebnisse der Simulation. Variieren Sie einzelne Parameter.

2. Stationäre elektrische Strömungsfelder

2.1. Feldgleichungen

In stationären elektrischen Strömungsfeldern wird ein elektrischen Leiter mit zeitlich konstantem Strom durchflossen. Solche Anwendungen werden also mit Gleichstrom betrieben. Die Maxwell Gleichungen für diesen Fall lauten wie folgt.

$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$	Durchflutungsgesetz
$\text{rot } \vec{E} = 0$	Induktionsgesetz
$\text{div } \vec{D} = 0$	keine Raumladungen

Somit folgt wegen $\text{div } D = \text{div } \epsilon E = 0$ für das elektrische Potential:

$\text{div grad } \phi = 0$ bzw. $\Delta \phi = 0$	Laplace Gleichung
--	-------------------

Außerdem gelten die Materialgleichungen, wobei speziell die letztere ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$) von Interesse ist und dem bekannten Ohmschen Gesetz entspricht (nämlich für einen Punkt im Leiter).

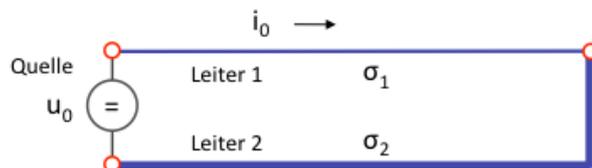
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	Materialgleichungen (Flussdichten
$\vec{B} = \mu \vec{H}$	in Abhängigkeit der Feldstärken)
$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	

Diese Gesetze lassen sich wie folgt interpretieren:

- Der Stromdichte \mathbf{J} entspricht ein konstantes magnetisches Wirbelfeld ($\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$).
- Es gibt keine elektrische Wirbelfelder ($\text{rot } \mathbf{E} = 0$).
- Es gibt keine Raumladungen ($\text{div } \mathbf{D} = 0$).
- Die Stromdichte ist proportional zur elektrischen Feldstärke ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$).

Die Gleichungen enthalten keine Aussage über Ursache und Wirkung, also ob z.B. die elektrische Feldstärke \mathbf{E} den Strom \mathbf{J} im Leiter mit der Leitfähigkeit σ treibt, bzw. ob der Strom eingepreßt ist. Ursache und Wirkung ergeben sich aus dem jeweiligen Anwendungsfall.

Frage 2.1.1: Eine Spannungsquelle u_0 treibt einen Heizdraht mit Rückleitung, wie in folgender Abbildung gezeigt. Die Leiter besitzen folgende Eigenschaften: Querschnitte $A_1 = A_2 = 0,2 \text{ mm}^2$, Längen $l_1 = l_2 = 10 \text{ m}$, spezifische Widerstände: $\rho_1 = 0,5 \text{ Ohm mm}^2/\text{m}$, $\rho_2 = 0,03 \text{ Ohm mm}^2/\text{m}$. Berechnen Sie den Leiterstrom i_0 und den Spannungsabfall über beiden Leitern. Welche Stromdichte ergibt sich in beiden Leitern? Skizzieren Sie das elektrische Ersatzschaltbild mit zwei diskreten Widerständen.



Lösung: Die Leitfähigkeiten entsprechen den Kehrwerten der spezifischen Widerstände, d.h. $\sigma_1 = 2 \text{ A m / V mm}^2$ und $\sigma_2 = 33,3 \text{ A m / V mm}^2$. Die Ersatzwiderstände berechnen sich nach $R = \rho l / A$ zu $R_1 = 25 \text{ Ohm}$ und $R_2 = 1,5 \text{ Ohm}$. Somit ergibt sich der Strom $i_0 = u_0 / (R_1 + R_2)$ und die Spannungsabfälle $u_1 = 0,94 u_0$ und $u_2 = 0,04 u_0$.

Strom und Stromdichte sind konstant: $J = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$.

Frage 2.1.2: Elektrische Feldstärke. Skizzieren Sie den Verlauf der elektrischen Feldstärke über den beiden Leitungsabschnitten 1 und 2. Skizzieren Sie den Verlauf des elektrischen Potentials ϕ in den beiden Leitungsabschnitten. Vergleichen Sie diesen Anwendungsfall mit der Strömung von Wasser in einem Gelände mit Gefälle (= Potential). Was bedeutet rot $\mathbf{E} = 0$ in den beiden Leitungsabschnitten?

Frage 2.1.3: Kontinuität: Was bedeutet $\text{div } \mathbf{J} = 0$ in den beiden Leitungsabschnitten? Wählen Sie hierzu geeignete, geschlossene Integrationsflächen.

Frage 2.1.4: Magnetische Feldstärke. Wenn Heizdraht und Rückleiter parallel geführt sind, erwarten Sie ein signifikantes magnetisches Feld? Skizzieren Sie den Verlauf und die Wechselwirkung beider magnetischer Felder. Gibt es magnetische Felder auch im Inneren der Leiter? Hat das magnetische Feld einen Einfluss das elektrische Feld?

Frage 2.1.5: Elektrische Flussdichte und Strömungsfeld. Wie verhält sich das Feld der elektrischen Flussdichte \mathbf{D} im Vergleich zur Strömungsfeld \mathbf{J} ? Gibt es Quellen bzw. Wirbel?

Frage 2.1.6: Potentialgleichung. Wie lässt sich die elektrische Feldstärke \mathbf{E} mit Hilfe des elektrischen Potentials ϕ aus der Potentialgleichung errechnen?

2.2. Stromdurchflossene Leiterplatte

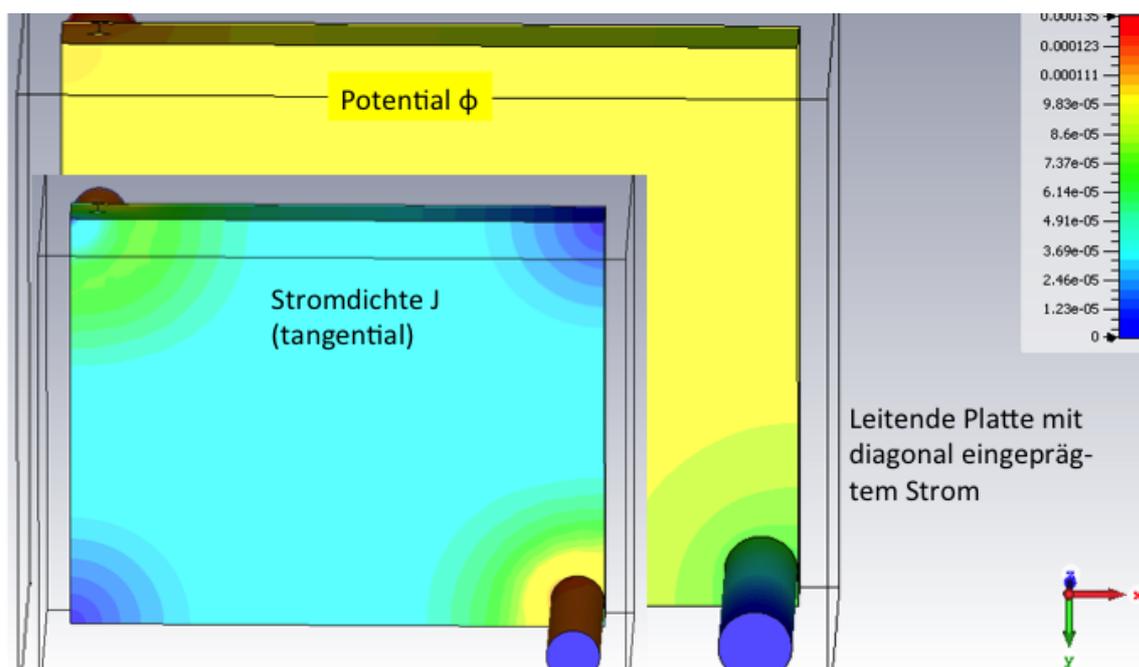
Statt eines stromdurchflossenen Leiter mit konstantem Querschnitt soll nun ein stromdurchflossenes Blech untersucht werden. In das Blech wird diagonal ein Strom eingespeist. Das Blech besteht beispielsweise aus Aluminium mit der konstanten Leitfähigkeit $\sigma_2 = 33,3 \text{ A m / V mm}^2$.

Frage 2.2.1: Modellierung. Erstellen Sie mit Hilfe der Software CST Studio ein eigenes Modell für das leitende Blech. Zur Einspeisung des Stroms verwenden Sie geeignete Anschlüsse in den Diagonalen. Setzen Sie die Materialeigenschaften in geeigneter Weise.

Frage 2.2.2: Simulation. Passen Sie die Eigenschaften des Raster geeignet an (dem Umfang Ihrer Lizenz entsprechend, Menüpunkt Mesh Properties). Verwenden Sie Stromports (Current Port) zum Einprägen des Stroms. Hinweis: Verwenden Sie den „Stationary Current Solver“. Hinweis: Unter dem Menüpunkt „Mesh View“ können Sie sich das verwendete Raster anschauen.

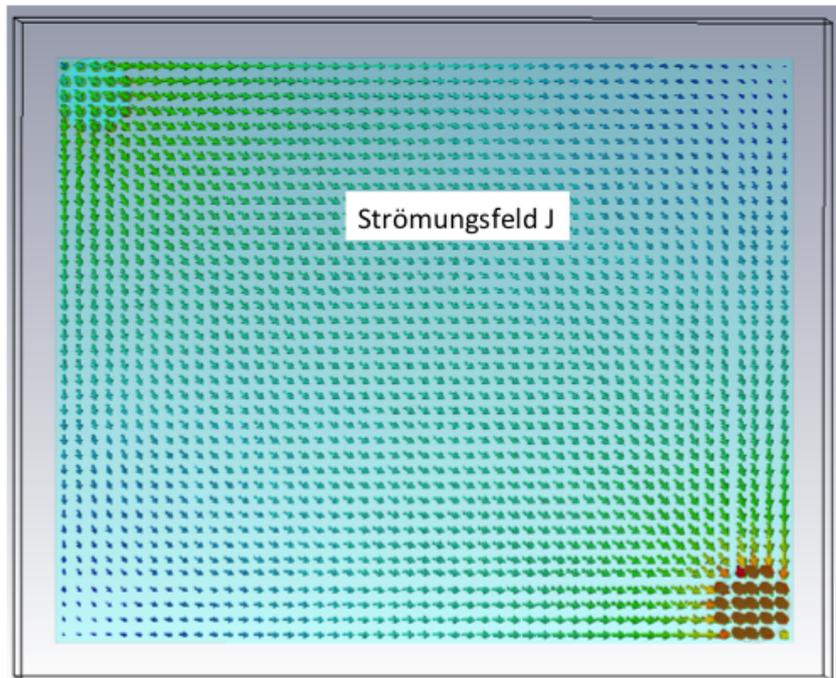
Frage 2.2.3: Simulationslauf mit Standardeinstellungen. Starten Sie einen Simulationslauf und betrachten Sie die Ergebnisse unter „2D/3D Results“ im Navigationsbaum. Wie verlaufen Potential und Stromdichte?

Lösungsbeispiel:



Frage 2.2.4: Strömungsfeld. Berechnen Sie unter „PostProcessing“ einen 3D-Plot des Strömungsfeldes. Analysieren Sie das Strömungsfeld auf Plausibilität mit der Theorie.

Lösungsbeispiel:

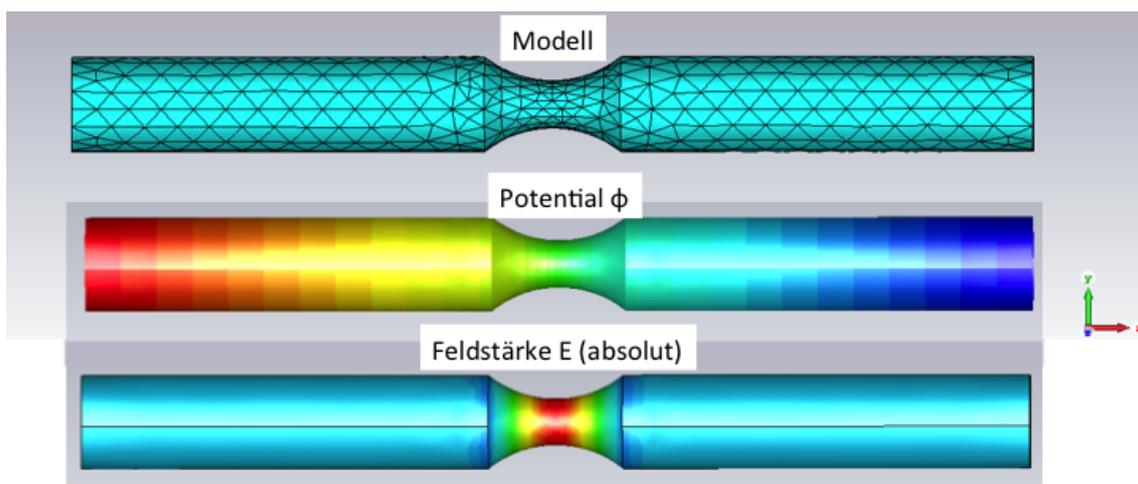


2.3. Einschnürung im Leiter

Untersuchen Sie denn Effekt einer Einschnürung in einem stromdurchflossenen Leiter. Eine solche Einschnürung kann z.B. durch Materialbearbeitung oder Materialverlust zustande kommen.

Frage 2.3.1: Modellierung. Erstellen Sie ein geeignetes Modell.

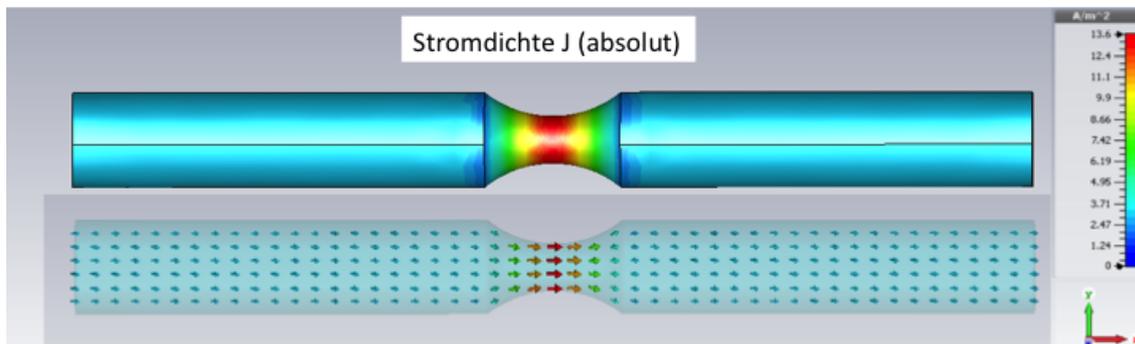
Lösungsbeispiel:



Frage 2.3.2: Simulation. Verwenden Sie den „Stationary Current Solver“ Js. Prägen Sie im Menüpunkt Simulation Ströme an den Stirnseiten des Leiters ein („Current Port“). Starten Sie die Simulation und untersuchen Sie die Standardergebnisse (unter „2D/3D Results“). Untersuchen Sie das elektrische Potential und die Feldstärke.

Frage 2.3.3: Nachbearbeitung. Berechnen Sie das Strömungsfeld (unter „Post Processing“). Untersuchen Sie die Ergebnisse auf Plausibilität und Übereinstimmung mit der Theorie. Warum folgt die Stromdichte der elektrischen Feldstärke?

Lösungsbeispiel:



Frage 2.3.4: Eigene Untersuchungen. Machen Sie sich mit dem Werkzeug vertraut und berechnen Sie weitere Ergebnisse der Nachbearbeitung. Setzen Sie ggf. einen anderen Solver ein (z.B. den „M-Static Solver“ zur Untersuchung der Magnetfelder).

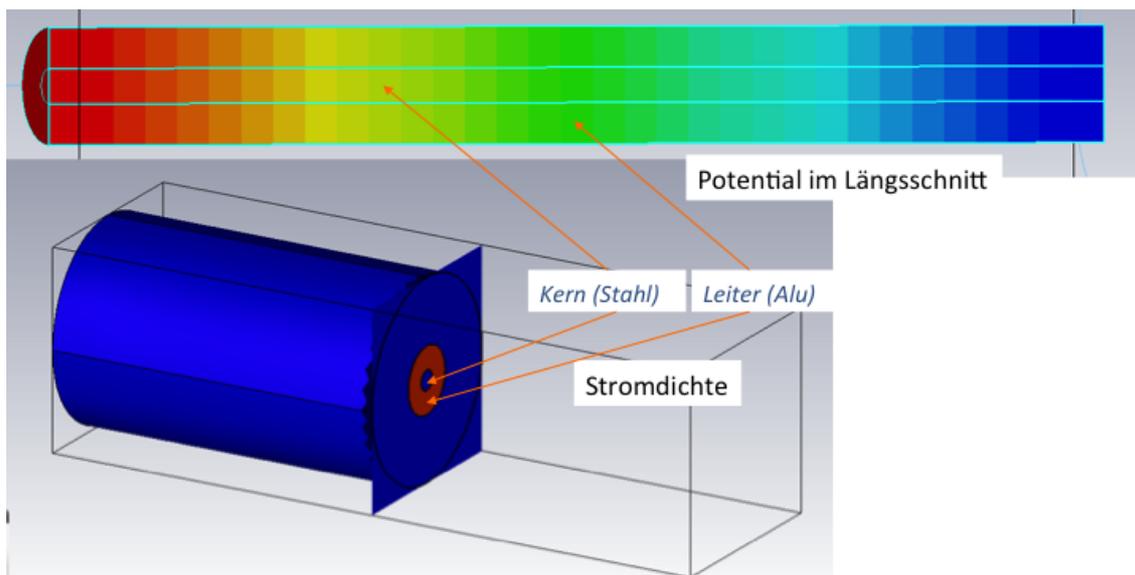
2.4. Felder im Inneren und Äußeren des Leiters

Ein Leiter besteht aus einem Aluminiummantel mit Stahlkern. Untersuchen Sie die Stromdichte und die magnetischen Felder im Inneren und Äußeren des Leiters. Hinweis: Treffen Sie passende Annahmen für die Geometrie und die Materialeigenschaften (z.B. $\rho_{Al} = 0,03 \text{ Ohm mm}^2/\text{m}$, $\rho_{St} = 1,2 \text{ Ohm mm}^2/\text{m}$, $\mu_{rAl} = 1$, $\mu_{rSt} = 100$).

Frage 2.4.1: Modellierung. Erstellen Sie ein Modell des Leiters. Hinweis: Passen Sie das Raster (Mesh) an dem Umfang Ihrer Lizenz an.

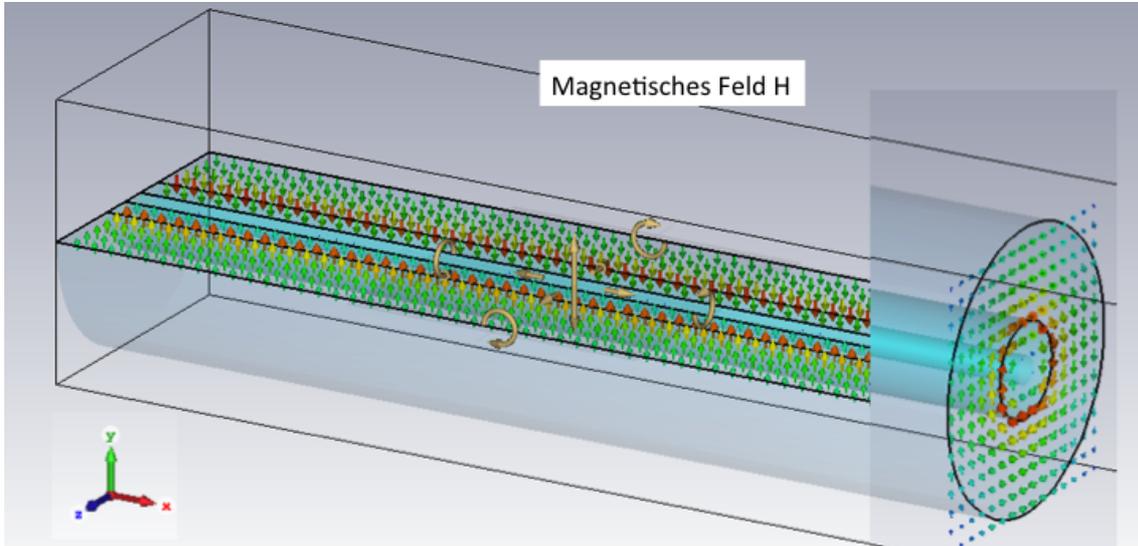
Frage 2.4.2: Simulation. Prägen Sie die Ströme ein und untersuchen Sie Potential und Stromdichte. Hinweis: Verwenden Sie den „Stationary Current Solver“ (Js).

Lösungsbeispiel:



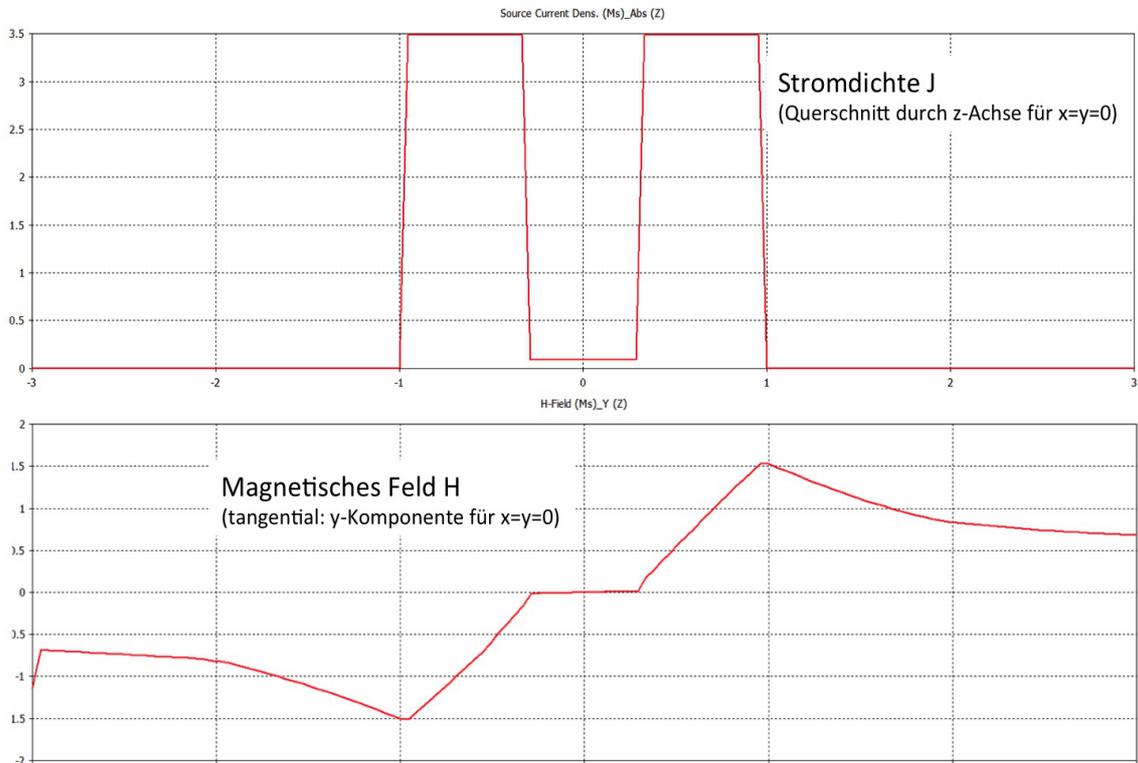
Frage 2.4.3: Magnetische Feldberechnungen. Verwenden Sie den „Magnetic Static Solver“ (Ms) zur Berechnung der magnetischen Felder. Untersuchen Sie das Magnetfeld. Hinweis: Verwenden Sie den Abschnitt der 2D/3D-Ergebnisse („Cutting Plane“) zur Visualisierung der Ergebnisse.

Lösungsbeispiel:



Frage 2.4.4: Nachbereitung. Berechnen Sie im Menü ausgewählte Kurven. Hinweis Verwenden Sie hierzu im „Template based Post Processing“ die Funktion „Evaluate Field in arbitrary Coordinates“. Untersuchen Sie Stromdichte und magnetische Feldstärke.

Lösungsbeispiel:



Frage 2.4.5: Prüfen Sie die Plausibilität Ihrer berechneten Lösung. Verwenden Sie hierzu die eingangs genannte Gleichungen. Wie erklärt sich der Verlauf der Stromdichte über dem Querschnitt des

Leiters? Wieso gibt es ein Magnetfeld im Inneren des Leiters? Wieso verschwindet das Magnetfeld im Stahlkern? Wo ist die Energiedichte des Magnetfeldes am größten? Wie wäre der Verlauf des Magnetfeldes, wenn der Kern ebenfalls aus Aluminium besteht?

Frage 2.4.6: Analytische Lösung. Wie würde man die Stromdichte und das Magnetfeld analytisch berechnen? Skizzieren Sie eine Lösungsansatz. Hinweis: Verwenden Sie das Lehrbuch [3].

3. Elektrostatische Felder

3.1. Feldgleichungen

Elektrostatiche Felder finden sich in Anwendungen mit nicht leitenden Materialien ohne zeitliche Änderungen. Hierzu gehören Isolierstoffe und Anordnungen mit Elektroden, die unter Gleichspannung betrieben werden. Mangels elektrischer Leitfähigkeit fließen keine Ströme. Es können jedoch elektrische Ladungen vorhanden sein. Solche Felder werden durch folgende Gleichungen beschrieben.

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \text{Raumladungen}$$

Somit folgt wegen $\text{div } D = \text{div } \epsilon E = \rho$ für das elektrische Potential:

$$\text{div grad } \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{bzw.} \quad \Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{Poisson Gleichung}$$

Unter den Materialgleichungen ist speziell die elektrische Flussdichte von Interesse. Ströme und Magnetfelder gibt es keine.

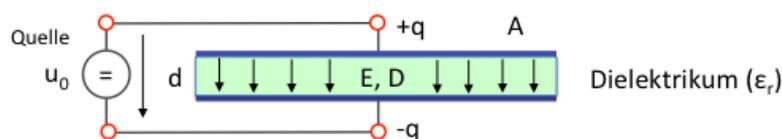
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{Materialgleichung}$$

Diese Gesetze lassen sich wie folgt interpretieren:

- Es gibt keine elektrische Wirbelfelder ($\text{rot } \mathbf{E} = 0$), somit ist das elektrische Feld ein Quellenfeld.
- Raumladungen entsprechen der elektrischen Flussdichte ($\text{div } \mathbf{D} = \rho$).

Die Berechnung der Felder erfolgt im numerischen Fall mit Hilfe des elektrischen Potentials ϕ in Form der Poisson-Gleichung $\Delta \phi = -\rho/\epsilon$, sofern der beobachtete Bereich Raumladungen enthält. Andernfalls erfolgt die Berechnung mit Hilfe der Laplace-Gleichung $\Delta \phi = 0$.

Frage 3.1.1: Feldstärke und Flussdichte. Gegen sei der in folgender Abbildung gezeigte Plattenkondensator mit den Abmessungen $A = 100 \text{ mm}^2$, $d = 2,5 \text{ mm}$. Als Dielektrikum wird eine Epoxidharzplatte mit der relativen Permittivität $\epsilon_r = 3,5$ verwendet. Der Kondensator wird mit Hilfe einer Gleichspannungsquelle mit $u_0 = 10 \text{ V}$ aufgeladen. Berechnen Sie Feldstärke und Flussdichte im Kondensator. Welche physikalische Einheit hat die Flussdichte? Welchen Einfluss hat das Dielektrikum?



Lösung: Feldstärke $E = u_0 / d = 10 \text{ V} / 2,5 \text{ mm} = 4000 \text{ V/m}$. Flussdichte $D = \epsilon E = \epsilon_r \epsilon_0 E = 3,5 * 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm} * 4000 \text{ V/m} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ As/m}^2$. Einfluss des Dielektrikums: erhöht die Flussdichte und somit die Ladungsmenge, z.B. im Vergleich zu Luft mit $\epsilon_r=1$.

Frage 3.1.2: Kapazität. Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators aus Aufgabe 3.1.1. Auf welche Weise könnte man die Kapazität des Kondensators erhöhen?

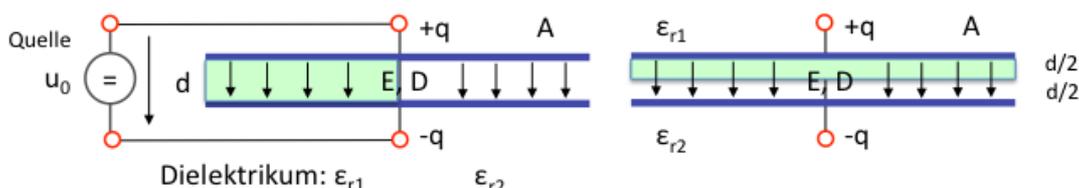
Lösung: Kapazität = Ladungsmenge, die bei gegebener Potentialdifferenz (Spannung) gehalten werden kann. Die Ladungsmenge geht aus der Flussdichte und der Fläche des Kondensators hervor. $C = Q/u_0 = D A / u_0 = (1,2 \cdot 10^{-7} \text{ As/m}^2 * 100 \text{ mm}^2) / 10 \text{ V} = 1,2 \text{ pF}$.

Maßnahmen zur Erhöhung der Kapazität: (1) Geometrie: die Fläche A vergrößern (mehr Ladungen) bzw. den Abstand d der Elektroden verringern (höhere Feldstärke), (2) Material: Dielektri-

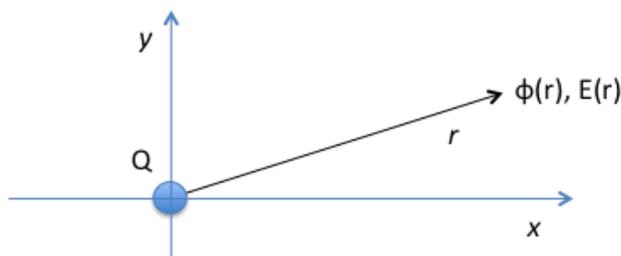
kum mit höherer Permittivität verwenden (höhere Flussdichte z.B. durch Verwendung von Tantaloxid mit $\epsilon_r = 25$).

Somit ist die Kapazität eine Eigenschaft der Geometrie und der Permittivität ϵ . Sie kennzeichnet die Fähigkeit einer Anordnung mit gegebenen Materialien, Ladungen (= elektrischer Fluss) aufzunehmen.

Frage 3.1.3: Geschichtete Dielektrika. Folgende Anordnung zeigt Plattenkondensatoren mit geschichteten Dielektrika. Skizzieren Sie die Beträge (Pfeile) der Feldstärken und Flussdichten qualitativ. Berechnen Sie die Feldstärken und Flussdichten, sowie die Kapazitäten der Anordnungen. Verwenden Sie hierzu passende Vorgaben, z.B. die aus Aufgabe 3.1.1 mit $\epsilon_{r1} = 3,5$ und $\epsilon_{r2} = 1$.



Frage 3.1.4: Elektrisches Feld einer Raumladung. Folgende Abbildung zeigt eine punktförmige Raumladung im Koordinatenursprung. Im Unendlichen wird Nullpotential angenommen. Die Permittivität im Raum beträgt $\epsilon_r = 1$. Berechnen Sie analytisch die elektrische Feldstärke im Abstand r außerhalb der Ladung Q . Hinweis: Verwenden Sie hierzu die Beziehung $\text{div } \vec{D} = \rho$ in der Integralform in Kombination mit einer geeigneten Geometrie für die Integrationsfläche (Kugeloberfläche). Welchen Einfluss hat der Raum auf die Feldstärke $E(r)$? Wie groß ist das Potential $\phi(r)$ in Abhängigkeit der Entfernung?



Lösung: Integralform der Quellengleichung: $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$

In Kugelkoordinaten $r = (r, \alpha, \theta)$ erhält man im Abstand r erhält für das Flächenelement dA der Kugeloberfläche: $dA = r \, d\alpha \, r \sin(\theta) \, d\theta = r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\alpha$. Somit erhält man für das Flächenintegral:

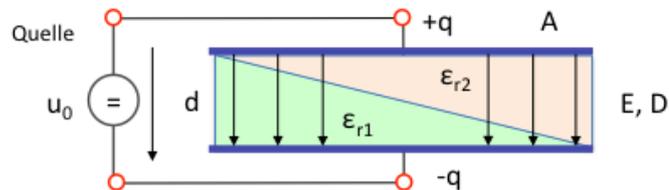
$$\text{Integral: } \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} D \, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\alpha = Q = D \, r^2 \, 4\pi$$

Mit $D = \epsilon E$ ergibt sich hieraus für die elektrische Feldstärke $E = Q / 4\pi\epsilon r^2$.

Dass die Feldstärke mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, ist somit ein reiner Effekt der Geometrie, bedingt durch die Verteilung auf die Kugeloberfläche. Das Potential $\phi(r)$ erhält man durch Integration der Feldstärke. Zu den geometrischen Berechnungen siehe Anhang B.

3.2. Einfluss des Dielektrikums

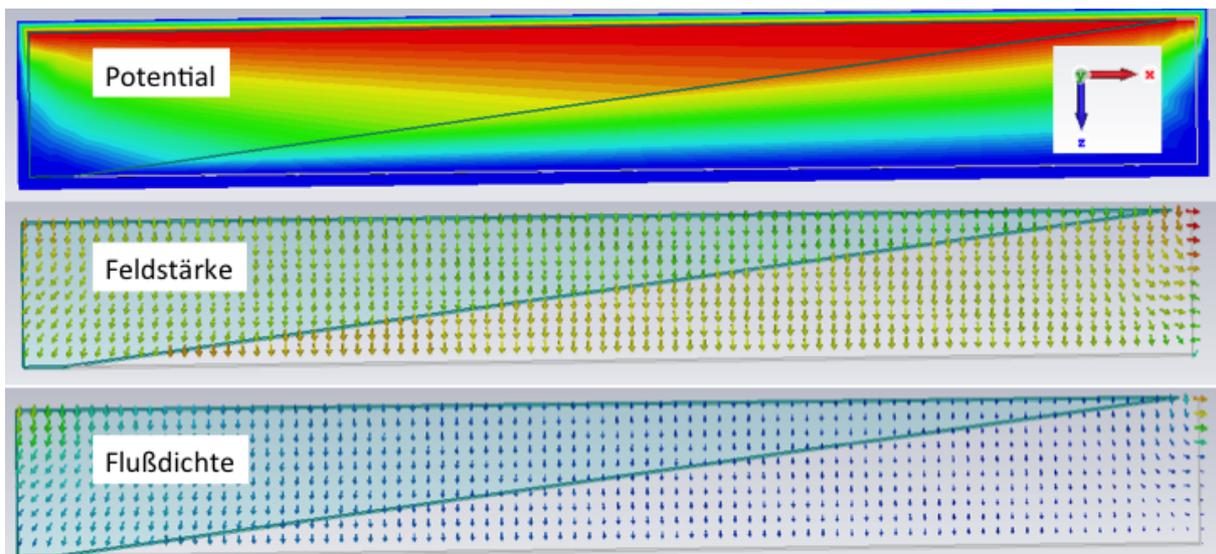
Der Einfluss des Dielektrikums soll in einer numerischen Berechnung untersucht werden. Hierzu werden keilförmige Dielektrika verwendet, wie in der folgenden Abbildung gezeigt. Für die Anordnung verwenden Sie beispielsweise die Werte aus Aufgabe 3.1.1 mit $\epsilon_{r1} = 3,5$ und $\epsilon_{r2} = 1$.



Frage 3.2.1: Analytische Betrachtung. Skizzieren Sie qualitativ Feldstärke und Flussdichte. Welche Ladungsverteilung stellt sich ein? Wie ist der Potentialverlauf?

Frage 3.2.2: Untersuchen Sie Flussdichte, Feldstärke und Potential in der numerischen Simulation. Überprüfen Sie die Ergebnisse auf Plausibilität. Wie erklären sich die Randeffekte?

Lösungsbeispiel:

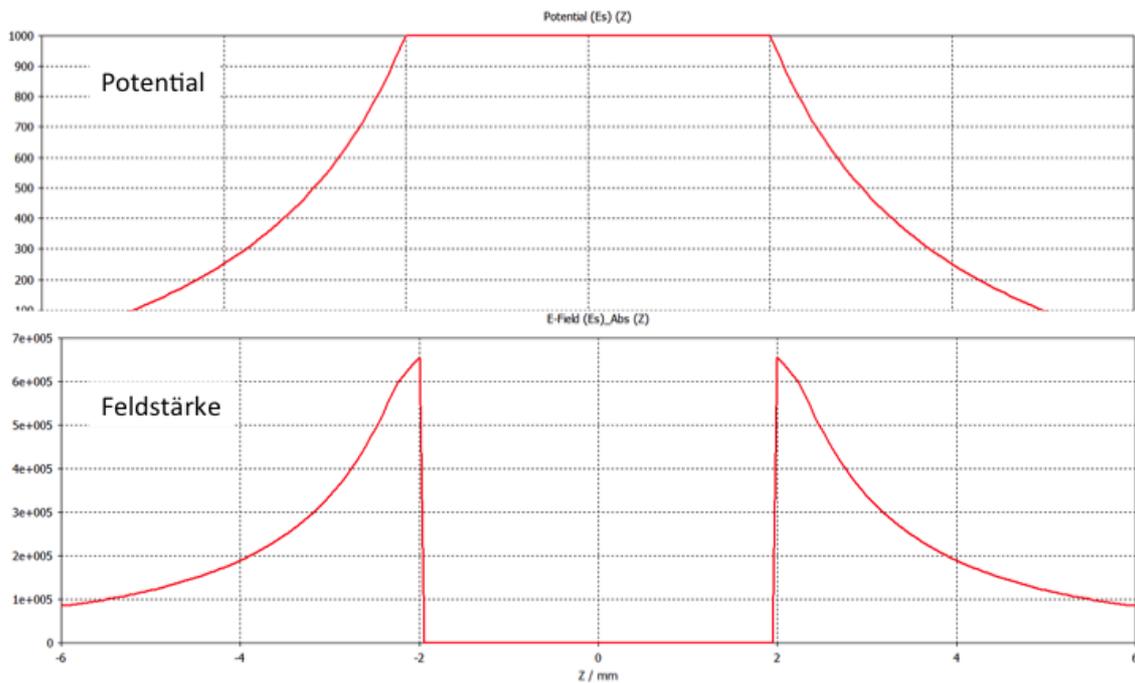
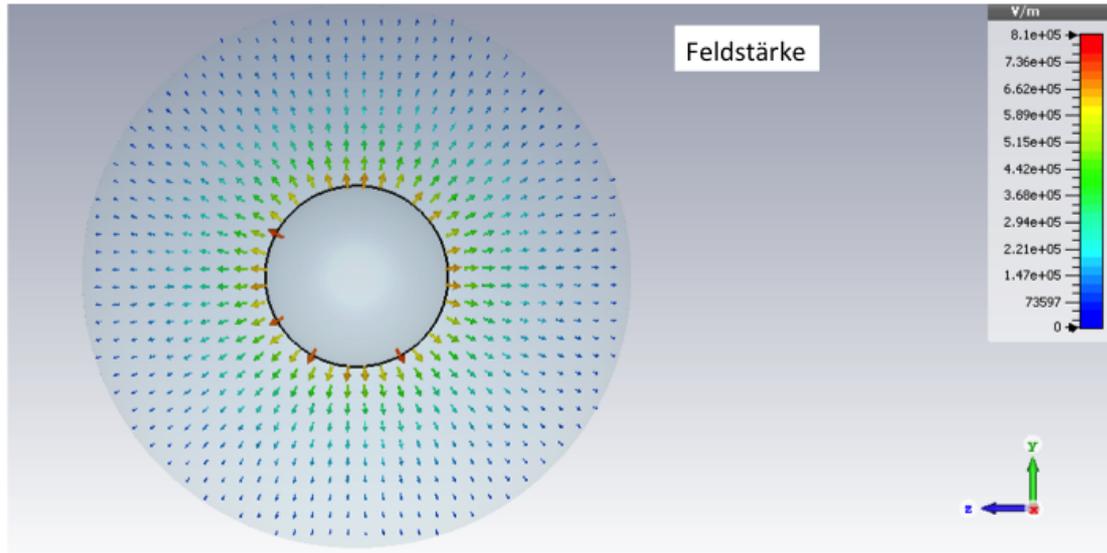


3.3. Kugelkondensator

Ein idealer Kugelkondensator besteht aus einer ideal leitenden Kugel im Inneren einer ebenfalls ideal leitenden Hohlkugel. Diese idealisierte Anordnung lässt sich leicht mit einer analytischen Feldberechnung vergleichen.

Frage 3.3.1: Modellierung und Simulation. Erstellen Sie eine solche Anordnung mit Hilfe des Simulationsprogramms. Berechnen Sie Feldstärke und Potential. Hinweis: Verwenden Sie eine ideal leitende Kugel (Material PEC = Perfect Electric Conductor), die im Inneren einer Vakuum-Kugel eingebettet ist. Wählen Sie als Hintergrundmaterial (Background) einen Idealleiter (PEC).

Lösungsbeispiel:



Frage 3.3.2: Kapazität- Berechnen Sie die Kapazität der Anordnung mit Hilfe des Simulationswerkzeugs. Hinweis: Verwenden Sie hierzu den Menüpunkt „Solver Setup“ des Es-Solvers und setzen Sie ein Häkchen bei „Calculate capacitance matrix“.

Frage 3.3.3: Analytische Berechnung: Feldstärke und Potential. Berechnen Sie Feldstärke und Potential analytisch. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen Ihres Modells.

Frage 3.3.4: Analytische Berechnung: Kapazität. Berechnen Sie die Kapazität analytisch. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen Ihres Modells

Lösung: Kapazität $C = 4\pi\epsilon R_2 R_1 / (R_2 - R_1)$

Lösungsansatz: siehe Feld einer Raumladung, Aufgabe 5.4:

$$Q = D 4 \pi r^2$$

Ziel: $C = Q/U_{12}$

In Gleichung (5.5.2) bedeutet U_{12} die Potenzialdifferenz zwischen innerer und Äußerer Elektrode. Diese berechnet sich aus:

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

In Kugelkoordinaten erhält man hieraus mit der radiale Komponente E_r :

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr$$

Die radiale Komponente des Vektors E ergibt sich aus der Materialgleichung:

$$E_r = \frac{1}{\epsilon} D_r$$

Einsetzen ergibt:

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\epsilon} D_r dr$$

Nach Einsetzen von $Q = D \cdot 4\pi r^2$ erhält man:

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\epsilon r^2} Q dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr$$

Hierdurch ergibt sich nach Berechnung des Integrals:

$$U_{12} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Die gesuchte Kapazität C erhält man hieraus gemäß der Definition von C

Ergebnis:

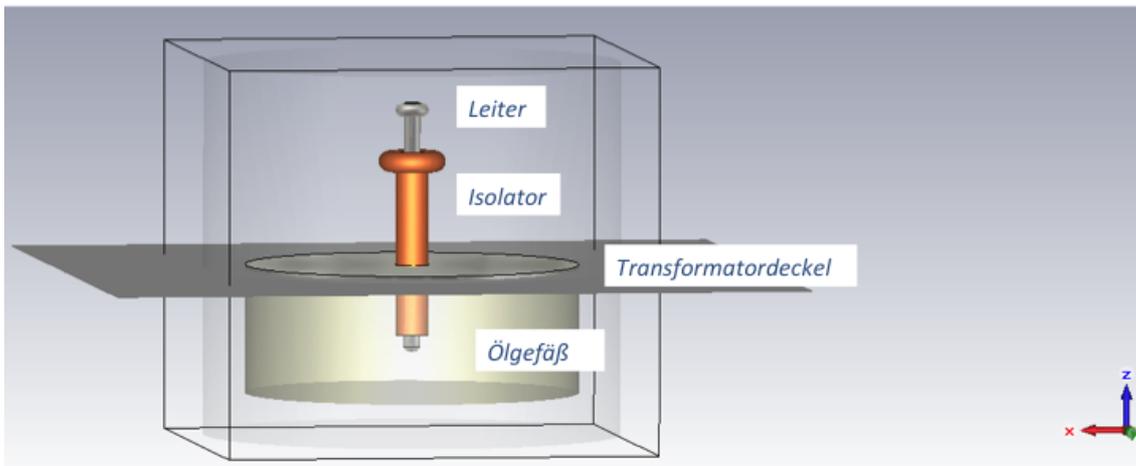
$$C = 4\pi\epsilon \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)$$

3.4. Hochspannungsdurchführung

Bei einer Hochspannungsdurchführung wird ein Leiter aus dem Hochspannungsnetz mit Hilfe eines Keramik-Isolators ins Innere eines Transformators geführt. Hierbei wird das Gehäuse des Transformators passiert. Der Transformator ist im Inneren mit Transformatoröl gefüllt. Die Durchführung ist bei Leistungstransformatoren in Bezug auf die Ausfallsicherheit eine kritische Komponente.

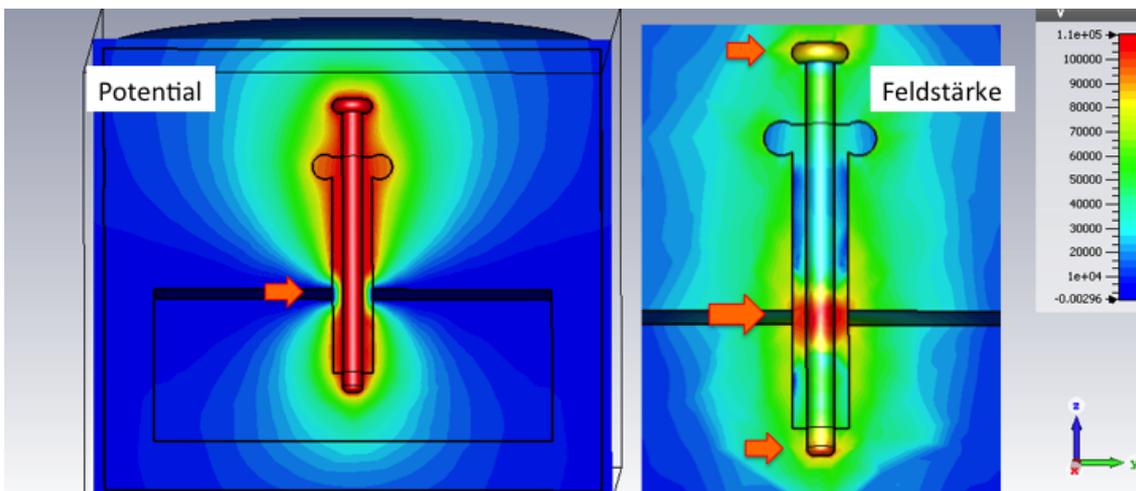
Frage 3.4.1: Modellierung. Erstellen Sie das Modell einer Durchführung. Hinweis: Bilden Sie den die Hülle des Transformatorgehäuses durch eine ideal leitende Platte nach, die der Leiter passiert. Als Isolator verwenden Sie eine hochspannungsfeste Keramik ($\epsilon_{\text{riso}} = 10$ und Leitfähigkeit Null). Weitere Komponenten des Transformators müssen nicht abgebildet werden. Den Raum unterhalb des Transformatorgehäuses (Transformatordeckels) füllen Sie mit Transformatoröl ($\epsilon_{\text{roil}} = 2,3$ und Leitfähigkeit Null). Den Raum oberhalb des Transformatordeckels sowie die umgebung der Anordnung definieren Sie als Vakuum. Als Hintergrund verwenden Sie normales Material.

Lösungsbeispiel:



Frage 3.4.2: Simulation. Verwenden Sie eine Hochspannung als Potential auf dem Leiter, z.B. 110 kV. Analysieren Sie die Feldstärke in Ihrer Anordnung. Welches sind die kritischen Stellen?

Lösungsbeispiel:



Frage 3.4.3: Maßnahmen zur Verbesserung. Erwartungsgemäß zeigt sich der Durchgang durch das Transformatorgehäuse als kritisch, sowie die Enden des Leiters. An den Enden des Leiters erzielt man durch Abrundung der Kanten Verbesserungen. Mit welchen Massnahmen könnte man die Durchführung durch das Gehäuse verbessern?

Frage 3.4.4: Einfluss von Inhomogenitäten: Welchen Einfluss haben Inhomogenitäten (wie z.B. Spitzen, Risse, Isolationsfehler) im Leiter, im Isolator, sowie im Innenraum des Transformators? Welche Rolle spielt das Material des Isolators (Permittivität)? Welche Rolle spielt das Transformatoröl?

4. Magnetische Felder

4.1. Feldgleichungen

Unter magnetostatischen Feldern versteht man magnetische Felder außerhalb stromführender Bereiche ohne zeitliche Änderungen. Solche Felder werden also entweder durch Ströme oder magnetisiertes Material (Permanentmagnete) erzeugt. Für die Feldgleichungen erhält man in diesem Fall:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0 \quad \text{Durchflutungsgesetz}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{Quellen}$$

Unter den Materialgleichungen ist speziell die magnetische Flussdichte von Interesse. Ströme gibt es im betrachteten Bereich keine. Über elektrostatische Felder wird keine Aussage gemacht. Auf solche Felder haben magnetische Felder keinen Einfluss. Umgekehrt wurde ein elektrischer Strom als Ursache eines magnetischen Feldes weiter oben von der Betrachtung ausgeschlossen.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{Materialgleichung (Flussdichte)}$$

Da die Felder außerhalb der stromführenden Bereiche wirbelfrei sind ($\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$), lassen sie sich numerisch mit Hilfe eines magnetischen Potentials ϕ_m ermitteln. Dieses Potential ist eine rein mathematische Hilfskonstruktion ohne physikalischen Hintergrund. Wegen $\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0$ folgt für das magnetische Potential:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi_m = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta \phi_m = 0$$

Diese Gesetze lassen sich wie folgt interpretieren:

- Es gibt keine magnetische Wirbelfelder ($\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$), somit erscheint das magnetische Feld im betrachteten Raum als Quellenfeld.
- Es gibt keine Quellen im betrachteten Raum ($\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$).

Die Berechnung der Felder erfolgt im numerischen Fall mit Hilfe des magnetischen Potentials ϕ_m in Form der mit Hilfe der Laplace-Gleichung $\Delta \phi_m = 0$.

Magnetfeld stationärer Ströme

Die Existenz durch Ströme verursachter Magnetfelder muss in dieser Betrachtung nicht ausgeschlossen werden. In den stromdurchflossenen Bereichen gilt jedoch:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad \text{Durchflutungsgesetz mit Strom}$$

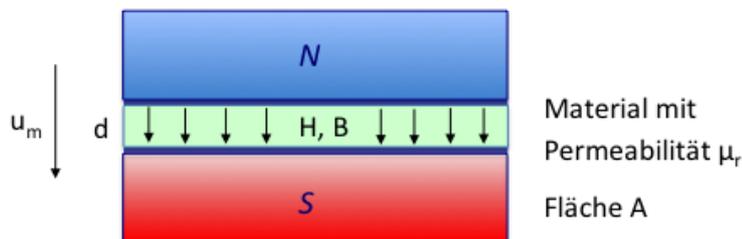
$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{keine zeitliche Änderungen}$$

Dieser Fall wurde bereits im Zusammenhang mit den elektrischen Strömungsfeldern in Abschnitt 2 dargestellt. Hierbei ist angenommen, daß es sich um stationäre Ströme handelt (Gleichstrom, keine zeitliche Veränderung). Als Hinweis hierauf wurde oben außer das Induktionsgesetz in der Form $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ (d.h. ohne zeitliche Änderung) aufgeführt. Die Berechnung des Magnetfeldes \mathbf{H} kann in diesem Fall direkt aus der Stromdichte \mathbf{J} erfolgen. Als Alternative hierzu dient eine weitere Hilfskonstruktion: die Definition eines Vektorpotentials \mathbf{A} . Für das Vektorpotential \mathbf{A} gilt dann in Anlehnung an den elektrostatischen Fall $\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$. Die Berechnung der Flussdichte bzw. der Feldstärke erfolgt dann durch $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$.

Aufgaben

Frage 4.1.1: Feldstärke und Flussdichte. In folgender Abbildung befindet sich ein Material mit der Permeabilität μ zwischen den Polschuhen eines Permanentmagneten. Die Anordnung besitzt die Abmessungen $A = 100 \text{ mm}^2$, $d = 2,5 \text{ mm}$. Als Material wird eine Stahlplatte mit der relativen Permeabilitätszahl $\mu_r = 1000$ verwendet. Als magnetische Potentialdifferenz wird ein Wert von $u_m = 10 \text{ A}$ angenommen. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke und Flussdichte. Welche phy-

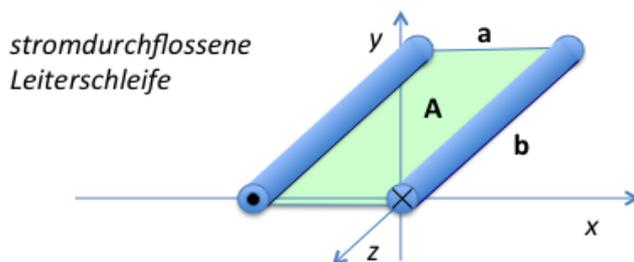
sikalische Einheit hat die Flussdichte? Welchen Einfluss hat das Material im Vergleich zu einem Luftspalt (bzw. einem nicht ferromagnetischen Material)? Berechnen Sie den magnetischen Fluss Φ und den Proportionalitätsfaktor Λ zwischen magnetischem Fluss und magnetischer Potentialdifferenz u_m . Wie lässt sich der Proportionalitätsfaktor Λ interpretieren?



Lösung: Feldstärke $H = u_m/d = 4000 \text{ A/m}$. Flussdichte: $B = \mu_r \mu_0 H = 1000 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Vs/Am} * 4000 \text{ A/m} = 5,03 \text{ Vs/m}^2$. Einfluss des Materials zwischen den Polschuhen: Erhebliche Verstärkung der Flussdichte gegenüber nicht magnetischem Material ($\mu_r = 1$).

Magnetischer Fluss Φ : Die Flussdichte B multipliziert mit der Fläche A ergibt $\Phi = B A = 5,03 * 10^{-4} \text{ Vs}$. Interpretiert man $\Phi = \Lambda u_m$, so ist $\Lambda = \Phi / u_m = 50,3 * 10^{-6} \text{ Vs/A}$ (Henry) ein Indikator für den magnetischen Fluss, den die Anordnung bei gegebenen magnetischer Potentialdifferenz u_m aufnehmen kann. Diese magnetische Kapazität (= Induktivität) ist abhängig von der Geometrie der Anordnung und von den Materialeigenschaften (μ_r).

Frage 4.1.2: Induktivität. Wie die Kapazität im elektrischen Fall ist die magnetische Induktivität eine geometrische und stoffliche Eigenschaft einer Anordnung. Statt mit Hilfe magnetisierter Materialien (Permanentmagnete) soll das magnetische Feld nun durch einen stromdurchflossenen Leiter erzeugt werden. Folgende Abbildung zeigt eine Anordnung mit der Fläche A , die durch einem Leitungsabschnitt der Länge b im Abstand a Leiter dargestellt wird. Erläutern Sie den Lösungsweg zur Berechnung der Induktivität der Leiterschleife.



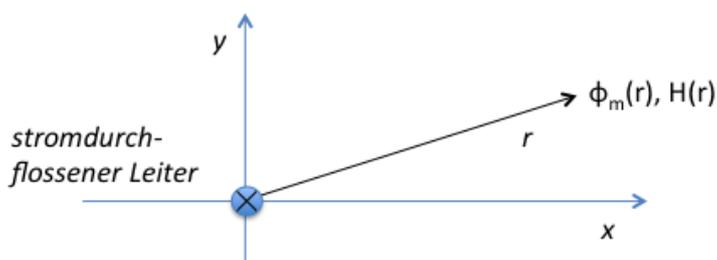
Lösung: Der Lösungsweg führt vom Strom I über die Feldstärke H . Mit Hilfe der Permeabilität $\mu_r \mu_0$ folgt aus H die magnetische Flussdichte B . Den magnetischen Fluss durch die Fläche A berechnet man somit aus der Beziehung $\Phi = \int B dA = \mu_r \mu_0 \int H dA$. Hierzu ist eine Berechnung der magnetischen Feldstärke H erforderlich (siehe Frage 4.1.4). Aus dem magnetischen Fluss Φ folgt dann aus der Beziehung $\Lambda = \Phi / I$ die Induktivität der Anordnung.

Beispiel: Aus der Literatur bzw. aus Frage 4.1.4 entnimmt für das Feld H eines mit dem Strom I durchflossenen Leiters mit Radius r_0 : $H(x) = I / 2\pi x$. Für den magnetischen Fluss eines Leiters der Länge b im Abstand $x = r_0$ bis $x = a$ erhält man somit aus $\Phi_1 = \int B dA = \mu_r \mu_0 \int H dA = ((\mu_r \mu_0 I b) / 2\pi) \int (1/x) dx = ((\mu_r \mu_0 I b) / 2\pi) \ln(a/r_0)$. Da die Anordnung symmetrisch ist, ergibt sich der gesamte Fluss beider Leiter aus $\Phi = 2 \Phi_1 = ((\mu_r \mu_0 I b) / \pi) \ln(a/r_0)$. Somit beträgt die Induktivität der Anordnung $\Lambda = \Phi / I = ((\mu_r \mu_0 b) / \pi) \ln(a/r_0)$.

Das Ergebnis zeigt, dass die Induktivität eine Eigenschaft der Geometrie und der Materialeigenschaften ist (Abmessungen b und a , Permeabilität μ). Sie kennzeichnet die Fähigkeit einer Anordnung mit gegebenen Materialien, magnetischen Fluss aufzunehmen.

Frage 4.1.3: Ferromagnetische Stoffe. Im Unterschied zur Permittivität ϵ_r gibt es in Bezug auf die Permeabilität μ_r wenig Spielraum. Es gibt im Grunde genommen nur magnetische und nicht magnetische Materialien. Bei den nicht magnetischen Materialien gibt es keine nennenswerten Unterschiede in der Permeabilität: die Werte bewegen um $\mu_r \approx 1$. Magnetische (ferromagnetische) Stoffe besitzen deutlich größere Permeabilitätszahlen ab $\mu_r > 1000$. Welchen Effekt hat ein Luftspalt zwischen den Polschuhen in der Anordnungen 4.1.1, der sich durch mangelnde Passgenauigkeit der Stahlplatte ergibt? Skizzieren Sie Feldstärke und Flussdichte zwischen den Polschuhen mit zusätzlichen Luftspalt.

Frage 4.1.4: Feld eines stromdurchflossenen Leiters. Folgende Abbildung zeigt einen mit dem Strom I durchflossenen Leiter im Koordinatenursprung. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $H(r)$ in Abhängigkeit der Entfernung r , sowie die magnetische Potential ϕ_m . Hinweis: Das magnetische Feld ist ein Wirbelfeld. Verwenden Sie daher die Beziehung $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ in der Integralform in Kombination mit einer geeigneten Geometrie für das Linienintegral. Welchen Einfluss hat der Raum (Entfernung r) auf die Feldstärke?



Lösung: Integralform des Durchflutungsgesetzes mit Strom I : $\oint \vec{H} \, d\vec{r} = I$

In Zylinderkoordinaten $r = (r, \alpha, z)$ ist das Linienelement dr des Kreises im Abstand r : $dr = r \, d\alpha$.

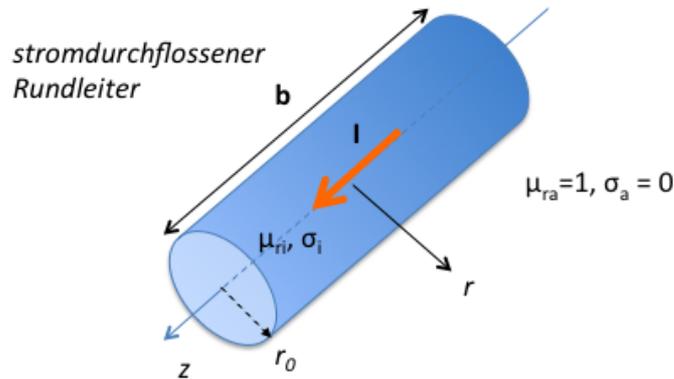
Somit erhält man für das Linienintegral: $\int_{\alpha=0}^{2\pi} H r \, d\alpha = I = H 2 \pi r$

Hieraus erhält man für die magnetische Feldstärke $H = I / 2\pi r$.

Dass die Feldstärke mit der Entfernung linear abnimmt, ist somit ein reiner Effekt der Geometrie, bedingt durch die Verteilung auf den Kreisumfang der zylindersymmetrischen Anordnung.

4.2. Stromdurchflossener Leiter

Folgende Abbildung zeigt einen mit dem Gleichstrom I gleichmäßig durchflossenen Rundleiter. Der Rundleiter besteht aus Material mit der Permeabilität μ_{ri} und Leitfähigkeit σ_i . Außerhalb des Rundleiters findet sich eine nichtleitende Umgebung mit $\mu_{ra} = 1$ und $\sigma_a = 0$.



Frage 4.2.1: Analytische Berechnung der Feldstärke. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke (1) im Leiterinneren, (2) im Außenraum des Leiters. Hinweis: Verwenden Sie hierfür die Integralform des Durchflutungsgesetzes $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

Lösung: (1) Im Innenraum des Leiters ist $0 < r < r_0$. In diesem Bereich ist nur der vom Radius r umschlossene Anteil des Stroms zu berücksichtigen:

$$\oint \vec{H} \, d\vec{r} = \int_A \vec{J} \, d\vec{A} \quad \text{mit } \mathbf{J} = I / \pi r_0^2$$

Für die rechte Seite mit der umschlossenen Kreisfläche $A = \pi r^2$ erhält man:

$$\int_A \vec{J} \, d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^r J r \, dr \, d\alpha = \pi r^2 J = I \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$$

Für die linke Seite erhält man für die tangential verlaufende Feldstärke H :

$$\oint \vec{H} \, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} H r \, d\alpha = 2\pi r H \quad (\text{F4.2.1})$$

Somit ergibt sich für die Feldstärke innerhalb des Leiters:

$$H(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{r}{r_0^2}$$

Die Feldstärke steigt somit linear vom Leiterinneren bis zum äußeren Rand r_0 . Für Fall (2) außerhalb des Leiters umschließt man immer den gesamten Strom I , es gilt also:

$$\oint \vec{H} \, d\vec{r} = I$$

Durch Gleichsetzen mit dem linken Seite nach Gleichung (F4.1) erhält man $H(r) = I / 2\pi r$. Die Feldstärke fällt linear mit dem Abstand zum Leiter.

Frage 4.2.2: Analytische Berechnung der Induktivität. Berechnen Sie die Induktivität des Leiters (1) im Leiterinneren, (2) im Außenraum des Leiters. Hinweis: Verwenden Sie hierfür die im Feld gespeicherte Energie.

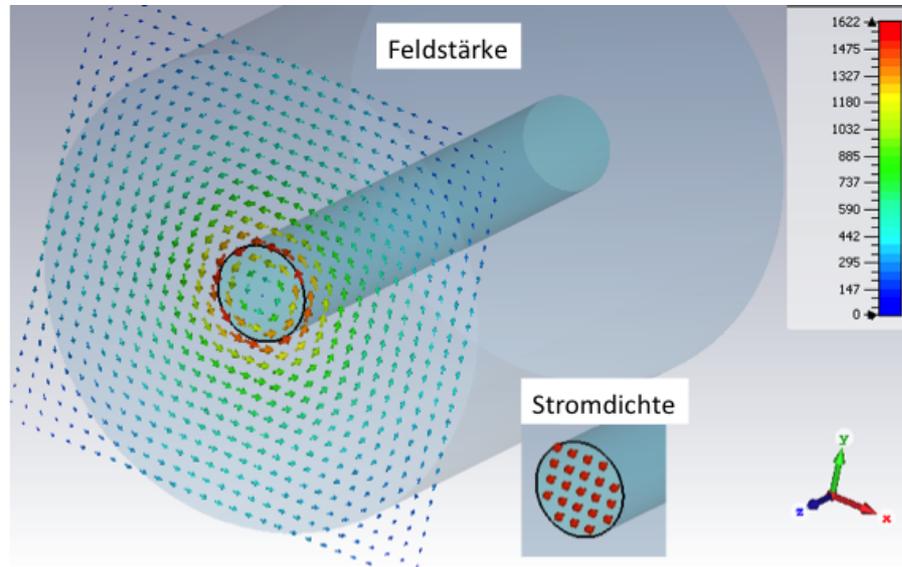
Lösung: Siehe [3], Abschnitt 3.4.

Frage 4.2.3: Magnetfeld außerhalb des Leiters. Berechnen Sie das Linienintegral $\oint \vec{H} \, d\vec{r} = U_m$ für die magnetische Umlaufspannung U_m . Wählen Sie hierfür einem geschlossenen Pfad in der xy -Ebene außerhalb des Leiters, der den Leiter nicht umschließt. Ist das Magnetfeld in diesem Bereich wirbelfrei?

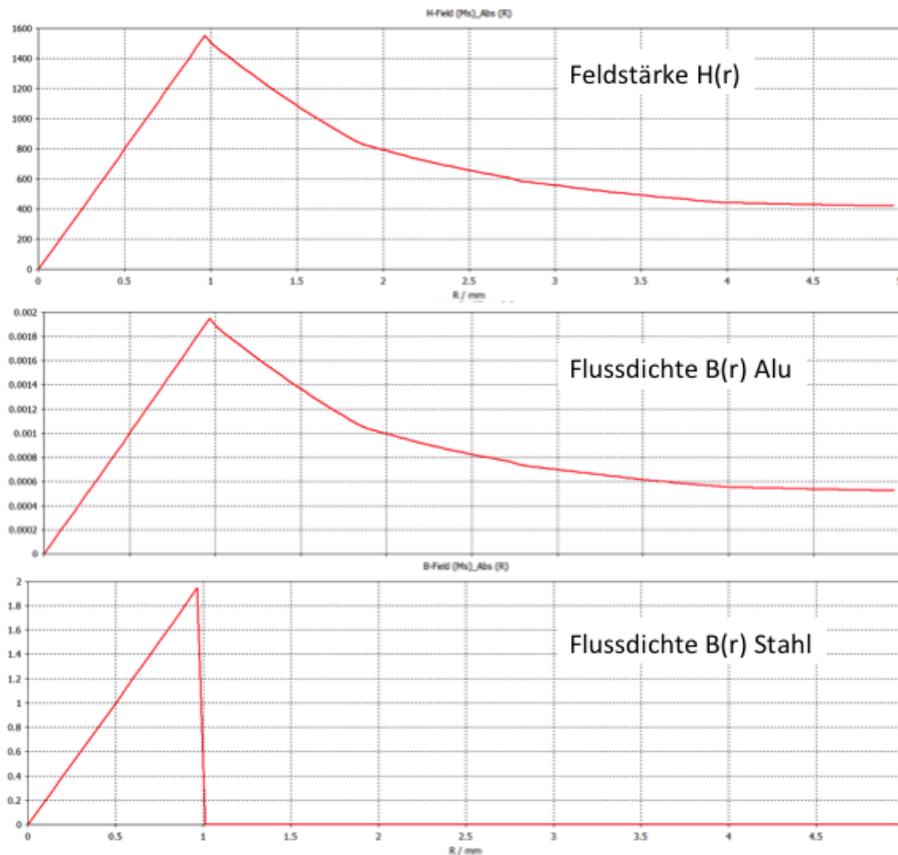
Lösung: Siehe [3], Abschnitt 3.4.

Frage 4.2.4: Numerische Berechnung. Simulieren Sie die Anordnung in der Feldberechnung und analysieren Sie die Felder innerhalb und Außerhalb des Leiters. Analysieren Sie den Einfluss des Leitermaterials, z.B. Aluminium oder Stahl.

Lösungsbeispiel:



Einfluss des Materials: Da der Strom eingepreist wurde, hat der geringere Leitwert von Stahl gegenüber Aluminium keinen Einfluss. Wegen der im Vergleich zu Aluminium hohen Permeabilitätszahl erhöht sich im Leiter jedoch die Flussdichte erheblich.

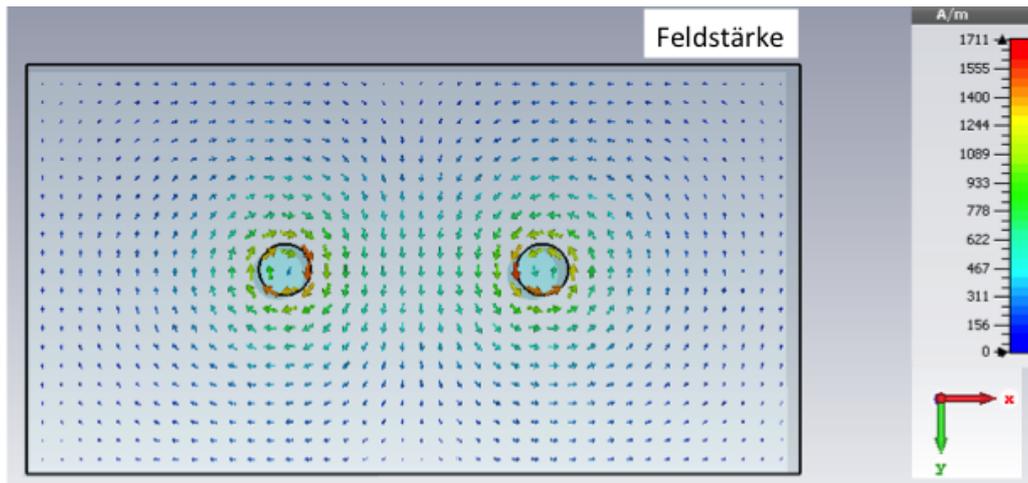


4.3. Magnetischer Fluss

Magnetischer Fluss durch eine Fläche kann entweder mit Hilfe einer Leiterschleife oder durch magnetisches Material erzeugt werden. Beide Fälle sollen hier untersucht werden.

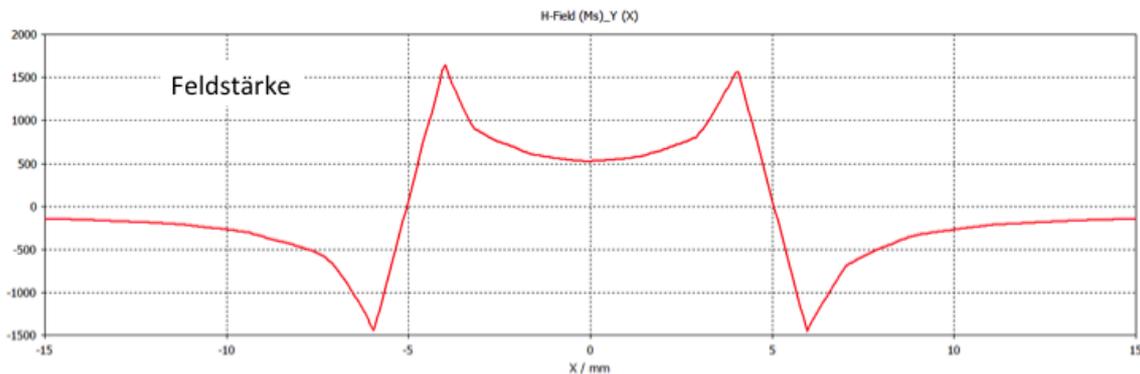
Leiterschleife

Zwei stromdurchflossene Leiter im Abstand a mit der Länge b umschließen die Fläche $A = a \cdot b$. Die Stromrichtung in den Leitern ist unterschiedlich (Leiterschleife), so dass die magnetischen Felder sich in der umschlossenen Fläche verstärken. Leiterstrom und Geometrie geben Sie willkürlich vor.



Frage 4.3.1: Feldstärke. Berechnen Sie die resultierende Feldstärke der Anordnung analytisch. Berechnen Sie dann die Feldstärke numerisch mit Hilfe der Simulation. Überprüfen Sie die Ergebnisse auf Plausibilität.

Lösung: Analytische Berechnung: siehe [3] Abschnitt 3.7. Numerische Berechnung:



Frage 4.3.2: Magnetischer Fluss. Berechnen Sie den Fluss der umschlossenen Fläche.

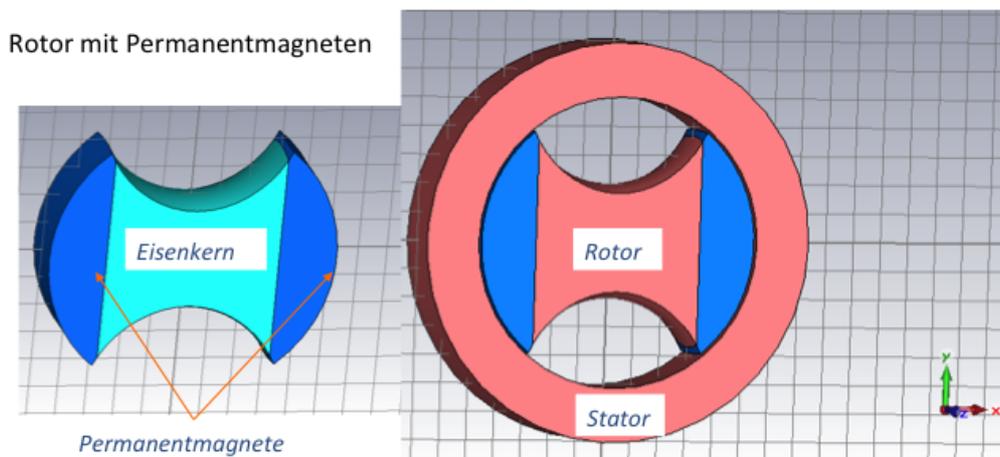
Lösung: siehe [3] Abschnitt 3.7.

Rotor mit Permanentmagneten

Der Rotor einer elektrischen Maschine soll mit Permanentmagneten ausgestattet werden.

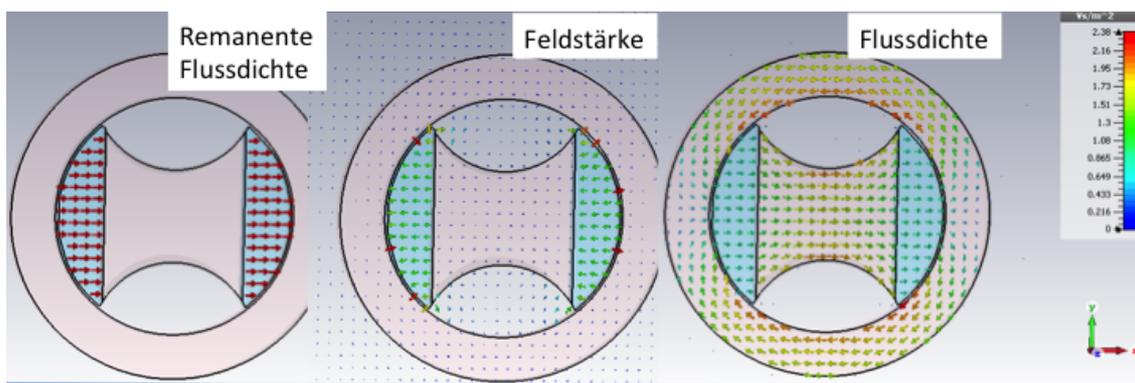
Frage 4.3.3: Modellierung und Simulation. Erstellen Sie ein Modell und untersuchen Sie Feldstärke und Flussdichte im Rotor.

Lösungsbeispiel:



Frage 4.3.4: Magnetischer Fluss im Stator. Ergänzen Sie den Stator, in dem sich der Rotor drehen soll. Untersuchen Sie den Einfluss des Stators auf die Flussdichte. Wo sind Feldstärke und Flussdichte am größten? Untersuchen Sie die Ergebnisse auf Plausibilität.

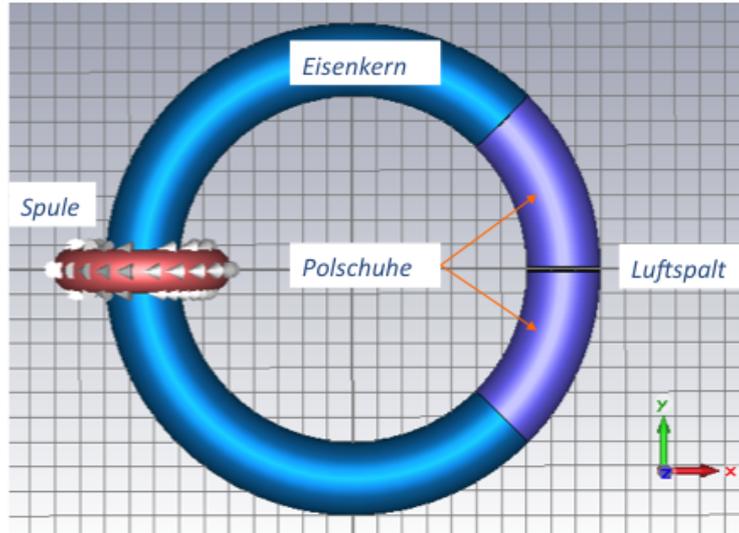
Lösungsbeispiel:



4.4. Magnetischer Kreis

Folgende Anordnung zeigt einen magnetischen Kreis bestehend aus Erregerspule, Eisenkern, Polschuhen und Luftspalt. Der Querschnitt der beteiligten magnetischen Komponenten ist konstant. Die Spule soll aus $N=100$ Windungen bestehen, mit Strom von $I = 1\text{ A}$.

Der Magnet ist ringförmig mit einem Außenradius von 10 cm und Innenradius 7 cm. Die Längen im Mittelpunkt des Querschnitts betragen $l_1 = 400,6\text{ mm}$, $l_2 = 131,5\text{ mm}$ und $l_3 = 2\text{ mm}$. Für den Eisenkern wird $\mu_{r1} = 1000$ angenommen, für die Polschuhe $\mu_{r2} = 100000$. Die Permeabilität des Luftspaltes beträgt $\mu_{r3} = 1$.



Frage 4.4.1: Analytische Berechnung. Berechnen Sie die magnetischen Feldstärken H_1 , H_2 und H_3 in den Abschnitten 1 (Eisenkern), 2 (Polschuhe) und 3 (Luftspalt) unter der Annahme, dass der Streufluss vernachlässigbar ist.

Lösung: Aus der Stetigkeit der Flussdichte ($B_1 = B_2 = B_3$) folgt, dass

$$\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2 = \mu_3 H_3. \quad (\text{F4.4.1})$$

Die Anordnung entspricht einer Serienschaltung der drei Abschnitte, somit gilt:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = NI = 100 \text{ A} = \int_{l_1} H_1 dl + \int_{l_2} H_2 dl + \int_{l_3} H_3 dl = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 \quad (\text{F4.4.2})$$

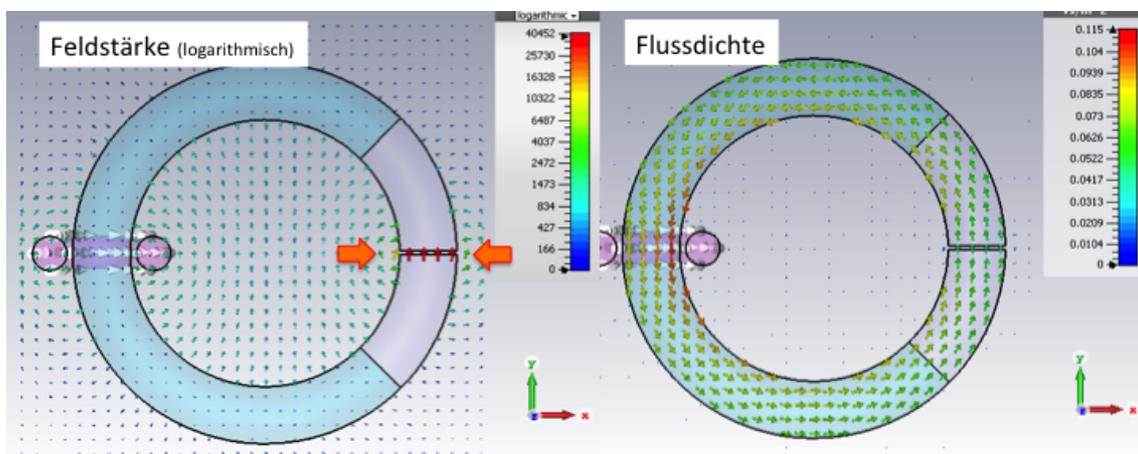
Durch Einsetzen der Verhältnisse aus Gleichung (F4.4.1) erhält man:

$$100 \text{ A} = NI = \frac{\mu_3}{\mu_1} H_3 l_1 + \frac{\mu_3}{\mu_1} H_3 l_2 + \mu_3 H_3 l_3$$

Hieraus errechnet sich H_3 und somit die übrigen Komponenten.

Frage 4.4.2: Simulation. Modellieren und simulieren Sie die Anordnung. Überprüfen Sie die Ergebnisse auf Plausibilität.

Lösungsbeispiel:



5. Quasistationäre elektromagnetische Felder

5.1. Feldgleichungen

Bei quasistationären Feldern gibt es zeitliche Änderungen, jedoch sind diese so, dass diese sich auf die gesamte Ausdehnung der Anordnung gleichzeitig auswirken. Effekte der Wellenausbreitung spielen also noch keine Rolle. Zu den Anwendungsfeldern gehören die Leistungselektronik, Energieversorgung und alle niederfrequenten Schaltungen.

Bezogen auf die Maxwell-Gleichungen sind diese Anwendungsfälle durch langsame Felder mit vergleichsweise großen Leitungsströmen gekennzeichnet. Der Leitungsstrom ist hierbei groß im Vergleich zum Verschiebungsstrom, d.h. $J \gg \partial D / \partial t$. Daher wird beim Durchflutungsgesetz dieser Anteil gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt. Man erhält folgende Gesetze:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad \text{Durchflutungsgesetz}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Induktionsgesetz}$$

Hier treten nun erstmals durch Änderungen der magnetischen Flussdichte induzierte elektrische Felder auf ($\operatorname{rot} \vec{E} = - \dot{\vec{B}}$). Die induzierten elektrischen Felder sind ebenfalls Wirbelfelder. Mit diesem Satz Gleichungen lassen sich übliche Schaltungen außerhalb der Hochfrequenztechnik bearbeiten, z.B. Transformatoren und Felder mit Wirbelströmen (siehe elektrisches Wirbelfeld $\operatorname{rot} \vec{E}$).

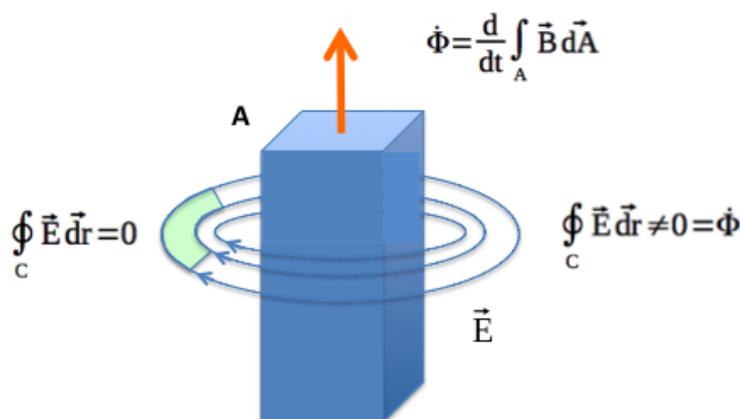
Vernachlässigt wird die Induktion magnetischer Wirbelfelder durch die elektrischen Wirbelfelder (siehe $J \gg \partial D / \partial t$ und somit $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$ anstelle von $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$).

Im Inneren eines Leiters findet durch die elektrischen Wirbelfelder wegen $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ eine Stromverdrängung statt, da dort die elektrischen Wirbelfelder dem Quellenfeld des Stroms \vec{J} entgegenwirkt. In den äußeren Schichten des Leiters verstärken sich die elektrischen Felder (Skin-Effekt).

Die Gleichungen über Quellen und die Materialgleichungen gelten in gewohnter Weise. Ob ein Feld als Quellenfeld oder Wirbelfeld auftritt, und ob Quellen vorhanden sind, ist hierbei stets eine Frage der jeweils betrachteten Umgebung.

Mit dem Vektorpotential A ergibt sich $\vec{B} = \mu \vec{H} = \operatorname{rot} A$ und somit $\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \mu \vec{J}$. Unter Verwendung der mathematischen Beziehung $\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A$ folgt wegen $\operatorname{div} A = 0$ für das magnetische Vektorpotential:

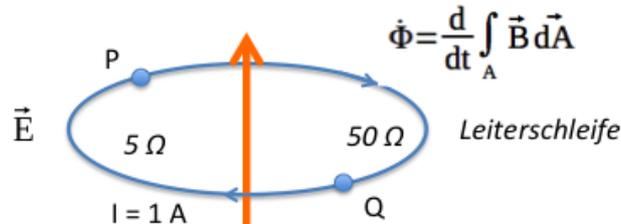
$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \text{Magnetisches Vektorpotential}$$



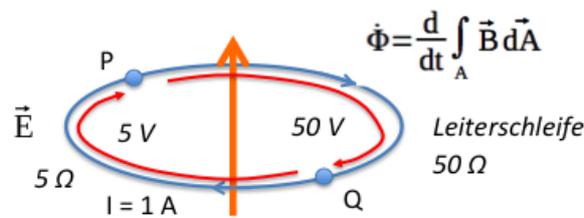
Frage 5.1.1: Induktion durch magnetische Flussänderung. Die Abbildung oben zeigt das durch die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses induzierte Wirbelfeld. Ob Wirbel auftreten, ist

eine Frage des jeweils betrachteten Raumes. Erläutern Sie, warum in den gezeigten Integrationspfaden Wirbel auftreten oder nicht.

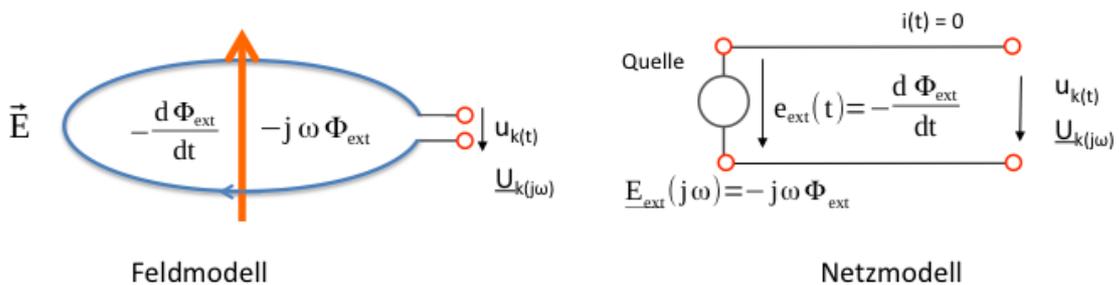
Frage 5.1.2: Umlaufspannung. Befindet ein leitenden Medium, so entstehen aus dem elektrischen Wirbelfeld Wirbelströme. Folgende Abbildung zeigt eine Leiterschleife bestehend aus zwei Abschnitten mit den Widerständen 5 Ohm und 50 Ohm. Welche Umlaufspannung erhält man zwischen den Punkten P und Q? Berechnen Sie die Umlaufspannung in den beiden Abschnitten sowie die gesamte Umlaufspannung.



Lösung: Zwischen P und Q erhält man 50 Volt, zwischen Q und P 5 Volt insgesamt somit 55 Volt, Die Umlaufspannung ist abhängig von gewählten Integrationspfad.



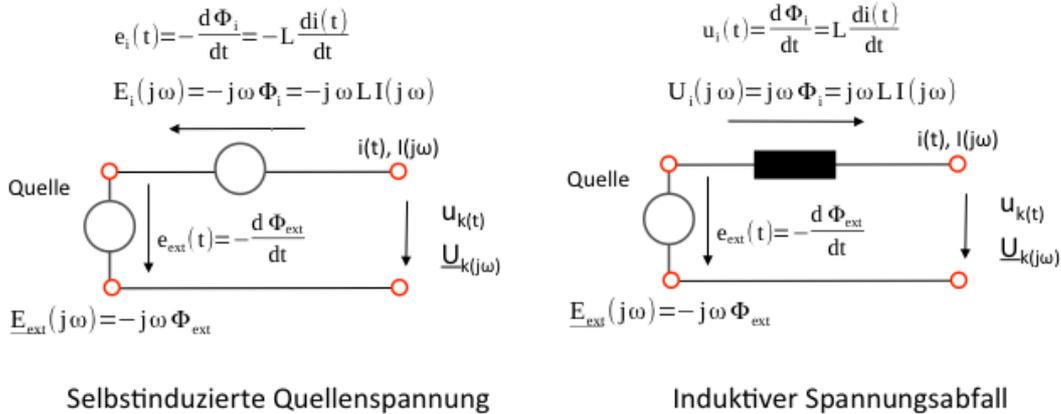
Frage 5.1.3: Netzwerkmodell der Induktion im Leerlauf. Die induzierte Spannung stellt in der elektrischen Ersatzschaltung (Netzwerkmodell) eine Spannungsquelle dar, wie in der folgenden Abbildung gezeigt. Hierbei wurde die Schreibweise im Zeitbereich, sowie die Schreibweise mit komplexen Zeigern, gewählt, wie bei Anwendungen mit fester Frequenz üblich. Welchem Zweck dient diese Ersatzschaltung und für welche Anwendungsgebiete eignet sich?



Lösung: Feldgrößen (hier: magnetischer Fluss) werden in Ersatzelemente (hier Spannungsquelle) überführt, die sich für die Berechnung von Schaltungen eignen. Weitere Elemente wären Stromquellen und passive Bauelemente. Anwendungsfälle: Generatoren, Motoren, Transformatoren, induktive Kopplung.

Frage 5.1.4: Netzwerkmodell der Induktion im Lastfall. In oben genannter Ersatzschaltung fließt kein Strom. Sofern ein Strom fließt, ist dieser mit einem magnetischen Fluss verbunden, der wiederum eine Spannung in der Leiterschleife induziert, die der ursprünglich induzierten Spannung entgegen wirkt. In der Ersatzschaltung kann man die selbstinduzierte Spannung entweder als

Spannungsquelle oder als induktiven Spannungsabfall berücksichtigen. Erläutern Sie den physikalischen Effekt und die beiden Varianten der in folgender Abbildung gezeigten Ersatzschaltung.

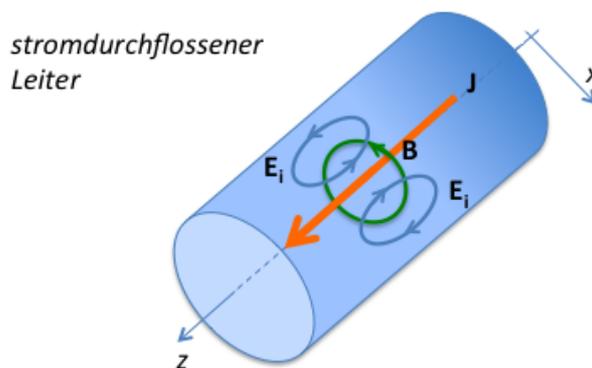


5.2. Stromverdrängung (Skin-Effekt)

Im Inneren eines mit Wechselstrom durchflossenen Leiters erzeugt die Stromdichte \mathbf{J} ein magnetisches Wechselfeld \mathbf{H} gemäß $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} = \sigma \vec{E}$. Nach dem Induktionsgesetz erzeugt die mit diesem Magnetfeld verbundene Änderung der magnetischen Flussdichte wiederum ein elektrisches

Wirbelfeld: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Dieses Feld wirkt im Inneren des Leiters dem ursprünglichen elektrischen

Feld \mathbf{E} entgegen, wodurch der Strom dort geschwächt wird. An den Rändern des Leiters wird der Strom verstärkt. Bei hohen Frequenzen ist dieser Effekt umso ausgeprägter: der leitenden Bereich reduziert sich auf die Ränder des Leiters (die äußeren Hülle, engl. Skin). Folgende Abbildung zeigt des Zusammenhang.



Frage 5.2.1: Elektrisches Feld. Wie lautet die Feldgleichung des resultierenden elektrischen Feldes? Hinweis: Verwenden Sie die beiden oben genannten Beziehungen für das Durchflutungsgesetz und für das Induktionsgesetz.

Lösung: Aus $\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E}$ und $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ eliminiert man H , indem man auf die zweite Gleichung nochmals den Operator rot anwendet und die Reihenfolge der Ableitungen

vertauscht: $\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}$.

Einsetzen der ersten Gleichung ergibt: $\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Die Operation $\text{rot rot } X$ ist gleich $\text{grad div } X - \Delta X$, wobei Δ den Laplace Operator bezeichnet. Da das Strömungsfeld quellenfrei ist ($\text{div } J = \text{div } \sigma E = 0$), erhält man als Feldgleichung:

$$\Delta \vec{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Frage 5.2.2: Wie lautet die Feldgleichung in komplexer Schreibweise (Phasoren, für Anwendungen mit einer festen Frequenz)? Welche Lösung besitzt die Feldgleichung?

Lösung: Feldgleichung in komplexer Schreibweise: $\Delta \vec{E} = -j \omega \mu \sigma \vec{E} = k^2 \vec{E}$

Lösungen der Feldgleichung sind vom Typ $E_z(x) = E_z(0) e^{-kx}$ mit $k = 1/\delta + j/\delta$. Der erste Anteil beschreibt die Dämpfung mit fortschreitender Eindringtiefe in den Leiter, der zweite Anteil beschreibt eine Phasendrehung.

Frage 5.2.3: Eindringtiefe. Die Lösung der Feldgleichung führt auf einen Ausdruck $|E_z(x)| = |E_z(0)| e^{-x/\delta}$

für den Betrag der elektrischen Feldstärke. Bei einer Eindringtiefe von $x = \delta$ hat der Betrag der Feldstärke somit auf den Anteil e^{-1} abgenommen. Welche Abhängigkeit von der Frequenz besitzt die Eindringtiefe δ ? Untersuchen Sie das Ergebnis auf Plausibilität.

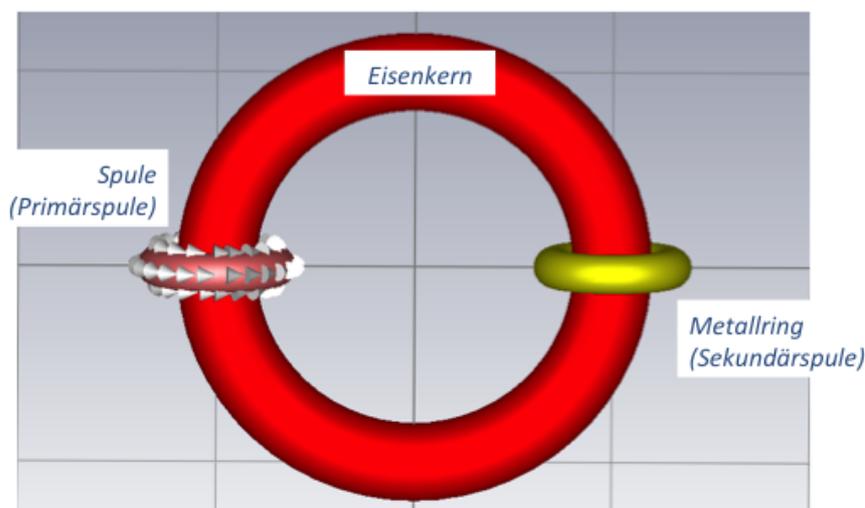
Lösung: Verwendet man $k^2 = \omega \mu \sigma = (1/\delta)^2$, so erhält man $\delta = 1/\sqrt{\omega \mu \sigma}$. Vervierfachung der Frequenz $f = \omega/2\pi$ der Wechselspannung führt also zu einer Halbierung der Eindringtiefe.

Die Eindringtiefe ist außerdem abhängig von der Leitfähigkeit und der Permeabilität. Diese Abhängigkeiten erklären sich aus der Entstehung des Effekts (Strom induziert Magnetfeld, Änderung des magnetischen Flusses (μ) induziert elektrisches Wirbelfeld, elektrisches Wirbelfeld führt zu Wirbelströmen im Leiter (σ)).

Frage 5.2.4: Untersuchen Sie den Effekt in der Simulation.

5.3. Transformator

Bei einem Übertrager (Transformator) wird das Induktionsgesetz dazu genutzt, um auf der Primärseite einen periodischen magnetischen Fluss zu erzeugen, der auf der Sekundärseite wiederum eine periodische elektrische Spannung induziert. Als Anwendungen finden sich beispielsweise die Anpassung von Impedanzen (Verstärker an Lautsprecher), bzw. in der elektrischen Energieversorgung.

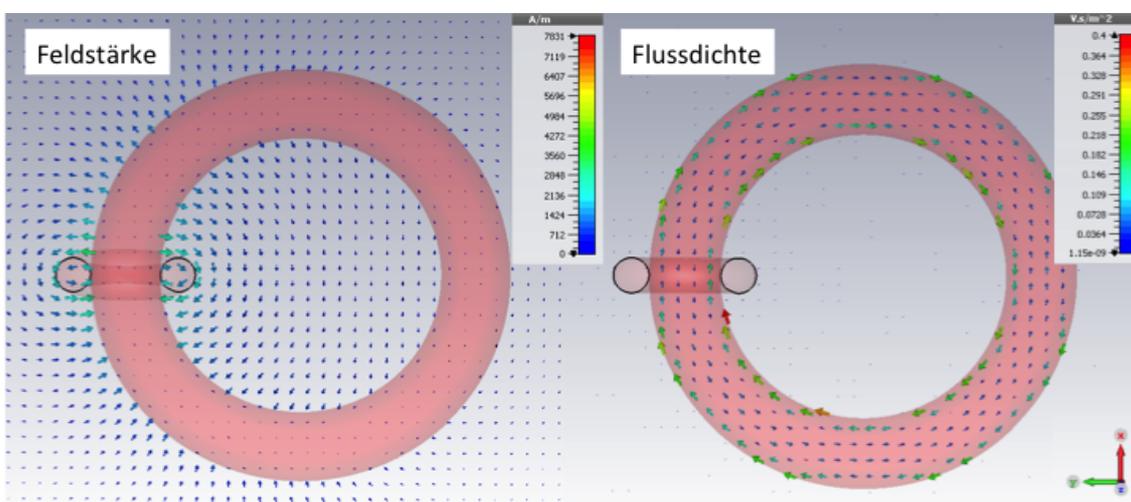


Das Prinzip soll an einem einfachen Beispiel veranschaulicht werden. Realisieren Sie hierzu ein einfaches Modell bestehend aus einem Eisenkern und einer Spule, die als Primärspule betrieben wird. Für diese Spule lässt sich eine Windungszahl vorgeben (z.B. $N = 10$, sowie der Strom, z.B. 1 A). Die Sekundärseite bleibt zunächst offen. Hier wird später ein metallischer Ring als Sekundärspule eingefügt.

Frage 5.3.1: Induktionsgesetz. Bauen Sie die Anordnung bestehend aus Eisenkern und Primärspule auf. Verwenden Sie als Material Eisen aus der Bibliothek. Untersuchen Sie die Feldgrößen. Hinweis: Für die Spule werden zwei Kurven benötigt (z.B. Kreise): (1) für den Querschnitt, (2) für die Strombahn im Zentrum des Querschnitts. Diese beiden Kurven sind zuerst zu erzeugen und werden dann dem Element „Coil“ per Mausclick zugeordnet.

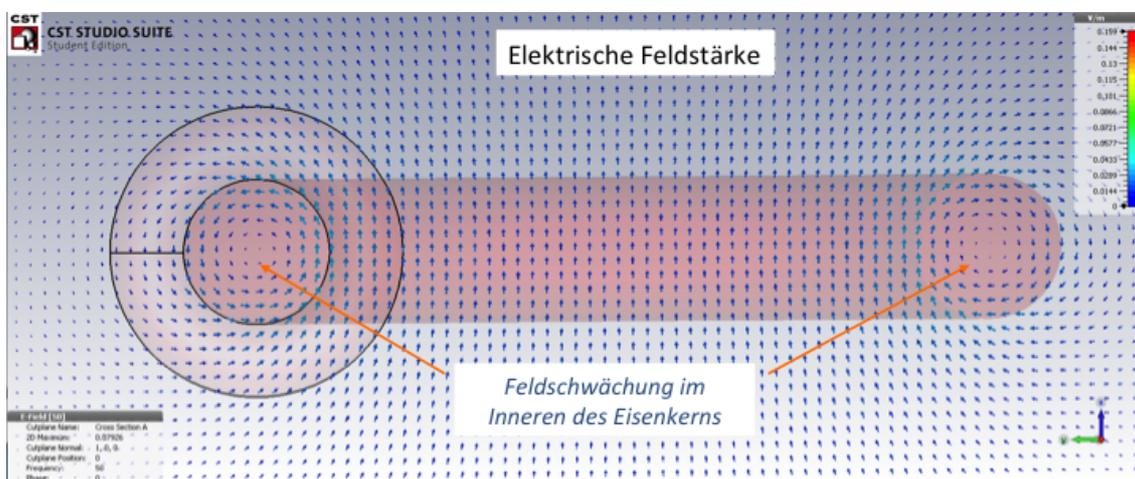
Lösungsbeispiel: Es wird Eisen mit $\mu_r = 1000$ verwendet.

(1) magnetische Feldgrößen: Ein Simulationslauf zeigt, dass sich die magnetische Feldstärke gemessen an den verursachenden Strömen wie erwartet verhält.



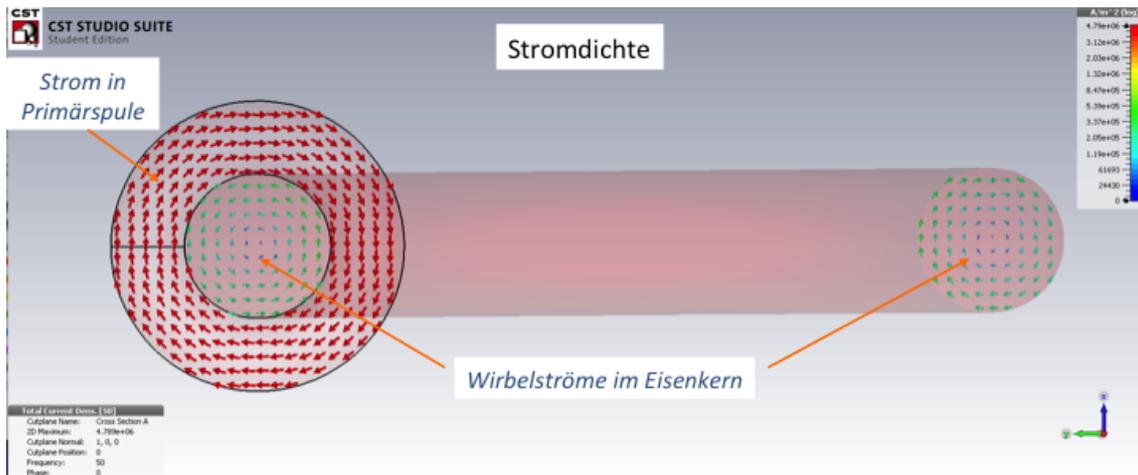
Die magnetische Flussdichte folgt dem Eisenkern (Materialgleichung). Allerdings ist der magnetische Fluß im Querschnitt des Eisenkerns nicht homogen: Im Inneren erscheint die Flussdichte geringer.

(2) elektrische Feldstärke: Die elektrische Feldstärke zeigt die zu erwartenden Wirbelfelder.



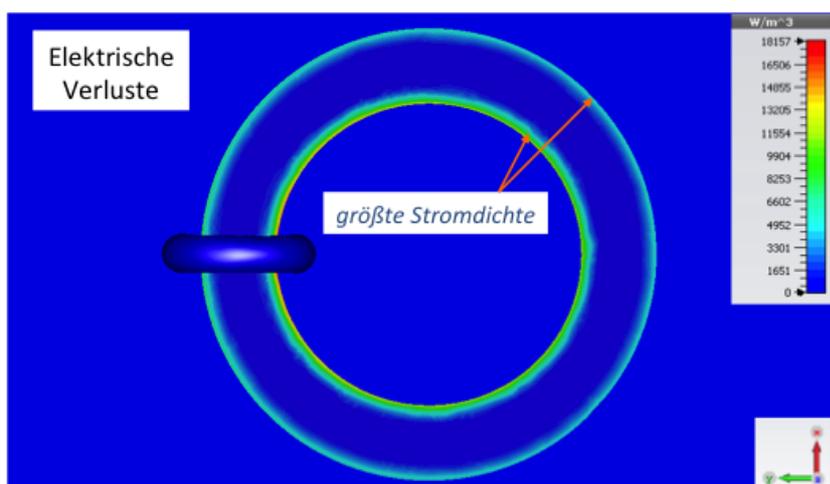
Diese Felder werden durch die Flussänderungen im Eisenkern verursacht.

(3) Stromdichten: Ein Blick auf die Stromdichten erklärt den Effekt der Inhomogenität.



Außer in der Primärspule finden sich Wirbelströme im Eisenkern, verursacht durch die Leitfähigkeit von Eisen (typischerweise ca 10 MS/m, im Vergleich zu Kupfer von ca. 58 MS/m). Diese Wirbelströme wirken den Strömen der Primärströme entgegen (siehe Abschnitt 5.2).

(4) Eisenverluste: Der Effekt der Wirbelströme sind Eisenverluste.



Die Betrachtung der elektrischen Verlustleistung ist speziell in den Randbereichen des Eisenkerns sehr groß, da dort die Ströme am größten sind. Dieser Effekt wird bei der Betrachtung der Leistung verstärkt (wegen $P = R I^2$).

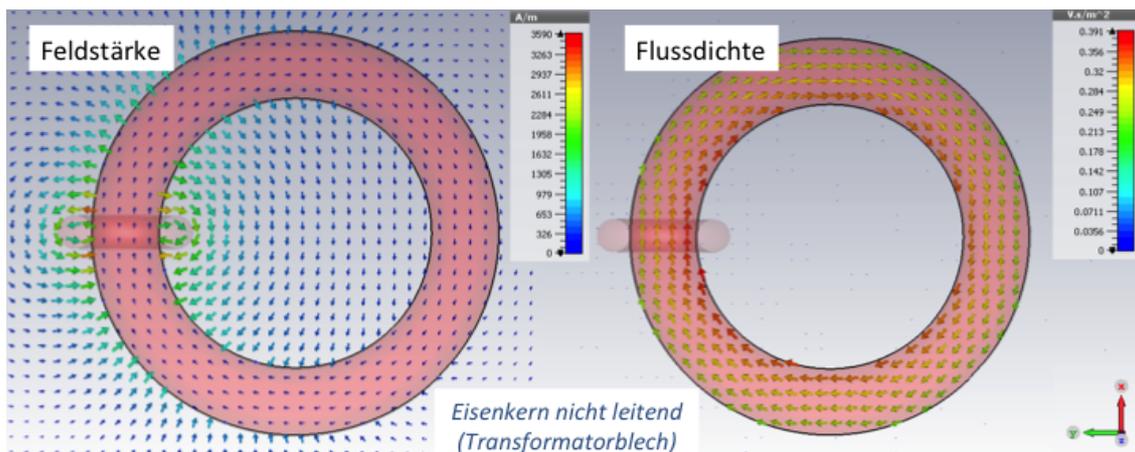
Ursache der Eisenverluste sind Wirbelströme, die durch die Leitfähigkeit des Eisenkerns ermöglicht werden. Diese Ströme folgen der elektrischen Feldstärke. Letztere ist nach dem Induktionsgesetz proportional zur zeitlichen Änderung des umschlossenen magnetischen Flusses. Daher wächst die elektrische Feldstärke vom Zentrum des Querschnitts des Kerns linear bis zum Rand (vgl. auch magnetische Feldstärke im Inneren eines Leiters).

Die elektrischen Wirbelströme verursachen wiederum magnetische Felder, die im Eisenkern mit einem signifikantem magnetischen Fluß verbunden sind. Dieser magnetische Fluß wirkt dem magnetischen Fluß, der von der Primärspule erzeugt wurde, entgegen. Hierdurch erklärt sich die Schwächung der magnetischen Flussdichte.

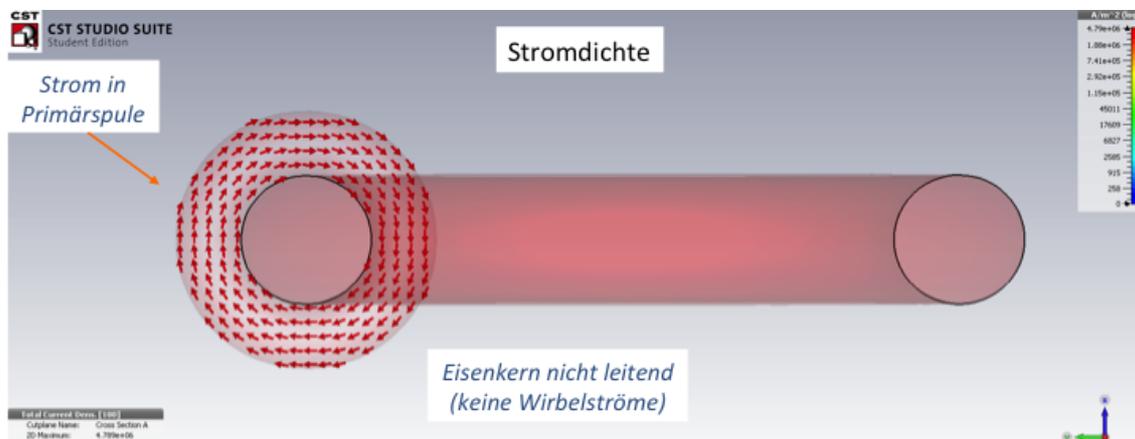
Frage 5.3.2: Transformatorblech. Um Verluste durch Wirbelströme zu vermeiden, werden Eisenkerne in Transformatoren aus Blechen aufgebaut. So ist der Wirbel unterbrochen. In der Simulation kann man sich dadurch helfen, dass man die elektrische Leitfähigkeit des Eisenkerns zu Null setzt. Überprüfen Sie die Effekte in der Simulation.

Lösungsbeispiel: Als einzige Änderung wurde die Leitfähigkeit des Eisenkerns zu Null gesetzt.

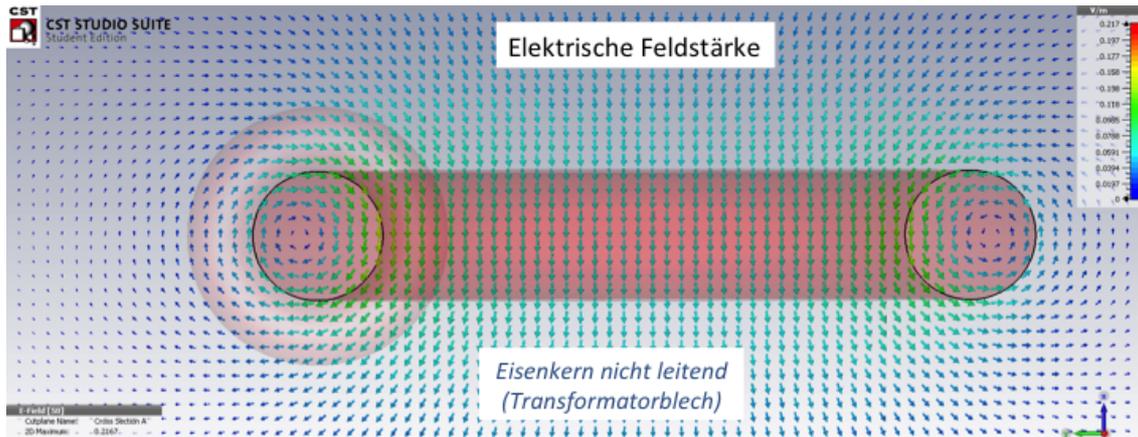
(1) magnetische Feldgrößen: Während sich bei der magnetischen Feldstärke erwartungsgemäß kein großer Unterschied zeigt, verläuft die magnetische Flussdichte über den Querschnitt des Eisenkerns nun deutlich homogener. Die verbliebene Erhöhung am inneren Radius des Eisenkerns ist eine Folge der Geometrie.



(2) Stromdichte: Die Wirbelströme innerhalb des Eisenkerns sind nun vollständig eliminiert.



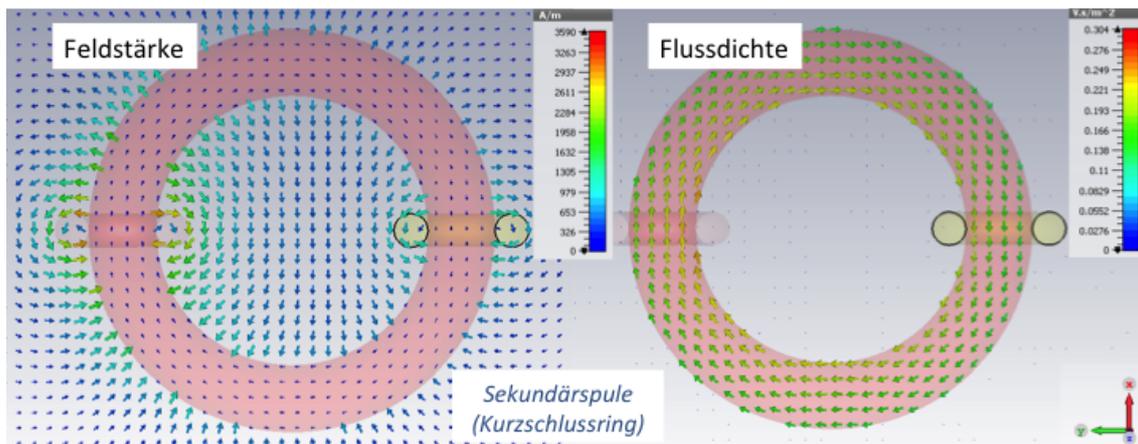
(3) elektrische Feldstärke: Durch die magnetische Flussänderung wird weiterhin ein elektrisches Feld induziert. Man erkennt, dass bei Ergänzung einer Sekundärspule um den Eisenkern jedoch mangels elektrischer Leitfähigkeit im Eisenkern kein Wirbelstrom mehr erzeugt werden kann.



Frage 5.3.3: Kurzschlussring. Die Anordnung soll nun um eine Sekundärspule erweitert werden. Im einfachsten Fall wird hierzu ein Kurzschlussring aus einem leitenden Material verwendet, z.B. Kupfer. Erweitern Sie Ihre Anordnung und analysieren Sie die Ergebnisse der Simulation.

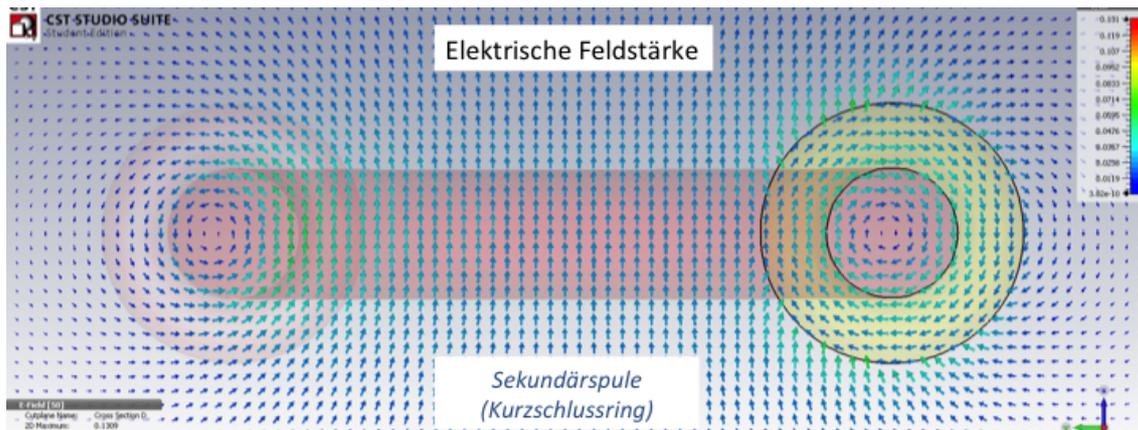
Lösungsbeispiel: Es wurde ein Kurzschlussring aus Kupfer eingefügt.

(1) magnetische Feldgrößen: Der Wirbelstrom im Kurzschlussring erzeugt nun seinerseits ein magnetisches Feld.

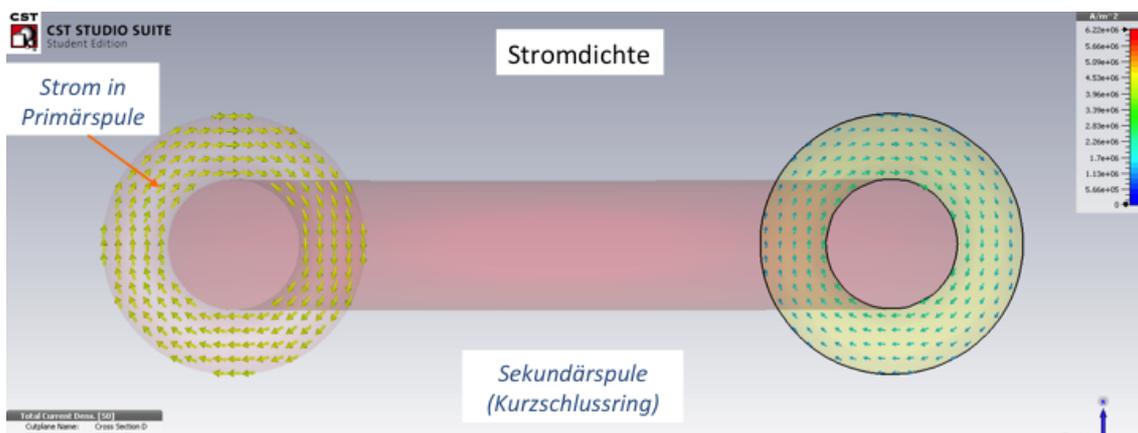


Da der Wirbelstrom proportional zur induzierten Feldstärke ist, und diese der magnetischen Flussänderung folgt, sollte der Wirbelstrom und folglich das zugehörige Magnetfeld um 90 Grad phasenverschoben zum Magnetfeld der Primärspule sein.

(2) elektrische Feldstärke:



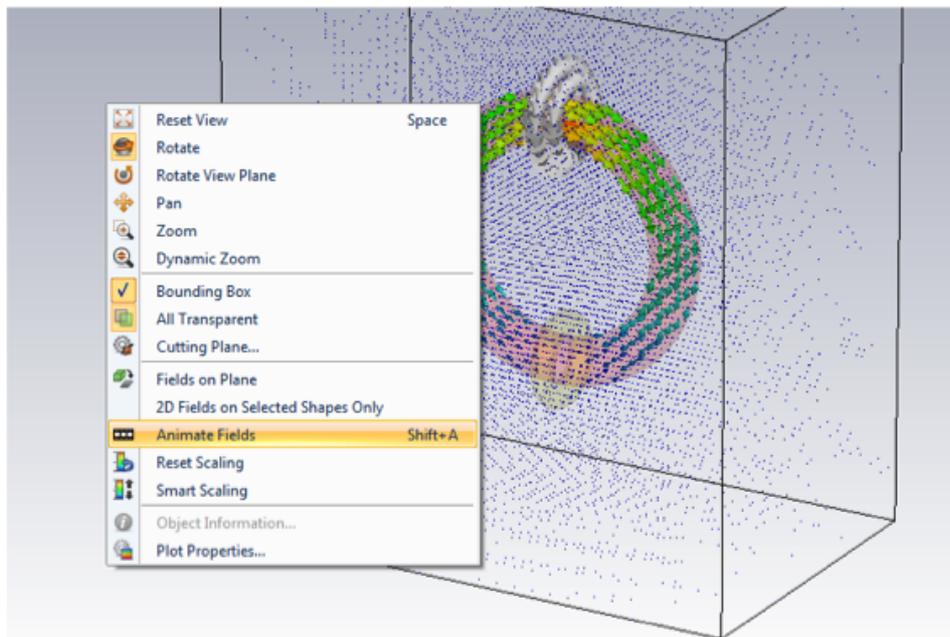
(3) Stromdichten: Im Kurzschlussring ergibt sich nun ein Wirbelstrom, der dem induzierten elektrischen Feld folgt. Die Höhe der Stromdichte ist hierbei um die elektrische Leitfähigkeit proportional zur elektrischen Feldstärke. Je nach elektrischem Widerstand des Kurzschlussrings fällt der Strom also größer oder kleiner aus.



Frage 5.3.4: Widerstand im Sekundärkreis. Welche Leistung entnimmt der Sekundärkreis der Anordnung? Gibt es ein Leistungsmaximum? Wie würde man den Wirkungsgrad definieren? Untersuchen Sie den Einfluss der Leitfähigkeit des Materials im Sekundärkreis auf Stromdichten, elektrische Feldstärke und Leistung. Mit welcher elektrischen Ersatzschaltung könnte man die Anordnung charakterisieren?

Simulation des Zeitverhaltens

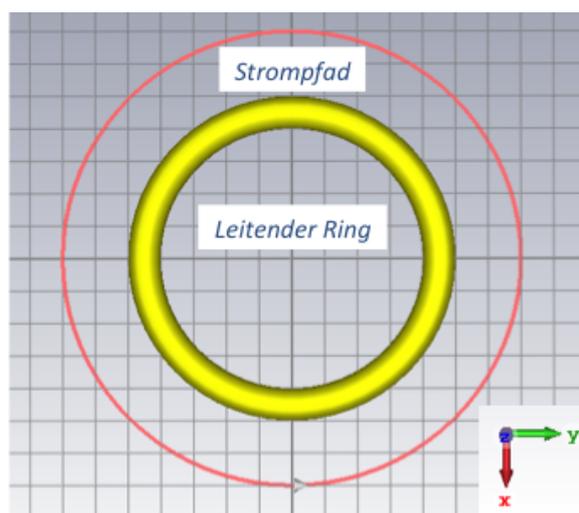
CST Studio ermöglicht die Animation der berechneten Felder über der Periodendauer. Hierzu öffnet sich unter dem Menüpunkt „View“ nach Klicken der rechten Maustaste ein Kontextmenü mit der Zeile „Animate Fields“, wie in folgender Abbildung gezeigt.



Hiermit lassen sich beliebige dargestellte Ausschnitte und Feldgrößen im zeitlichen Verlauf darstellen. Die Darstellungen lassen sich auch als Bildsequenzen exportieren. Ein Beispiel findet sich hier: [Transformator Animation](#).

5.4. Gekoppelte Spulen

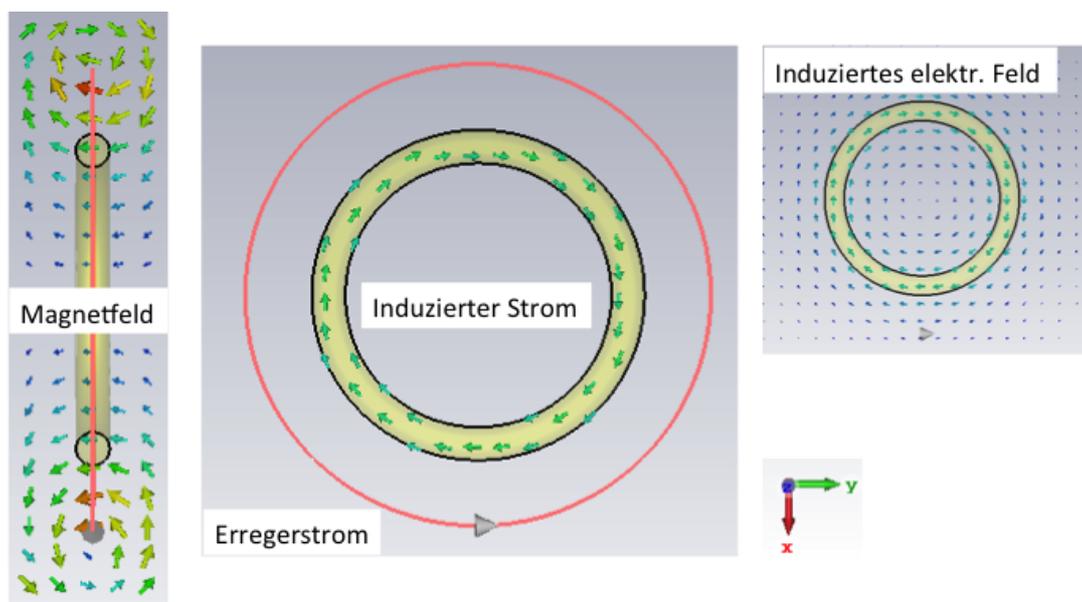
Eine Erregerspule soll mit einer Empfängerspule induktiv gekoppelt werden. Die Erregung soll mit einem periodischen Wechselstrom erfolgen, so dass außer Geometrie und Materialeigenschaften auch der Einfluß der Frequenz untersucht werden kann. Im einfachsten Fall wird die Erregerspule durch einen Strompfad nachgebildet, die Empfängerspule durch einen Ring (Torus) aus leitendem Material. Folgende Abbildung zeigt eine solche Anordnung.



In der gezeigten Anordnung sind der Erregerstrompfad und die Empfängerspule konzentrisch in einer Ebene angeordnet. Die Empfängerspule befindet sich im Inneren der Erregerspule.

Frage 5.4.1: Untersuchung der Felder. Geben Sie einen periodischen Strom auf die Erregerspule (bzw. den Erregerstrompfad) und untersuchen Sie die Felder. Erklären sie die zu beobachtenden Effekte mit Hilfe der Feldgleichungen. Folgen Sie hierbei der gewählten kausalen Kette (ausgehend vom Erregerstrom als Ursache).

Lösungsbeispiel: Der Erregerstrom verursacht ein Magnetfeld (Durchflutungsgesetz, Rechte-Hand-Regel). Die magnetische Flussdichte folgt dem Magnetfeld (Materialgleichung). Bzgl. der magnetischen Permeabilität ergeben sich bei den gewählten Materialien keine nennenswerte Unterschiede.



Da sich die magnetische Flussdichte periodisch mit dem Strom ändert, wird ein elektrisches Feld induziert (Induktionsgesetz). Der induzierte Strom folgt diesem elektrischen Feld, wo leitendes Material vorhanden ist (Materialgleichung).

Frage 5.4.2: Lastwiderstand und übertragene Leistung. Fügen Sie einen Lastwiderstand in die Empfängerspule ein. Untersuchen Sie die über die induktive Kopplung übertragene Leistung in Abhängigkeit dieses Lastwiderstandes.

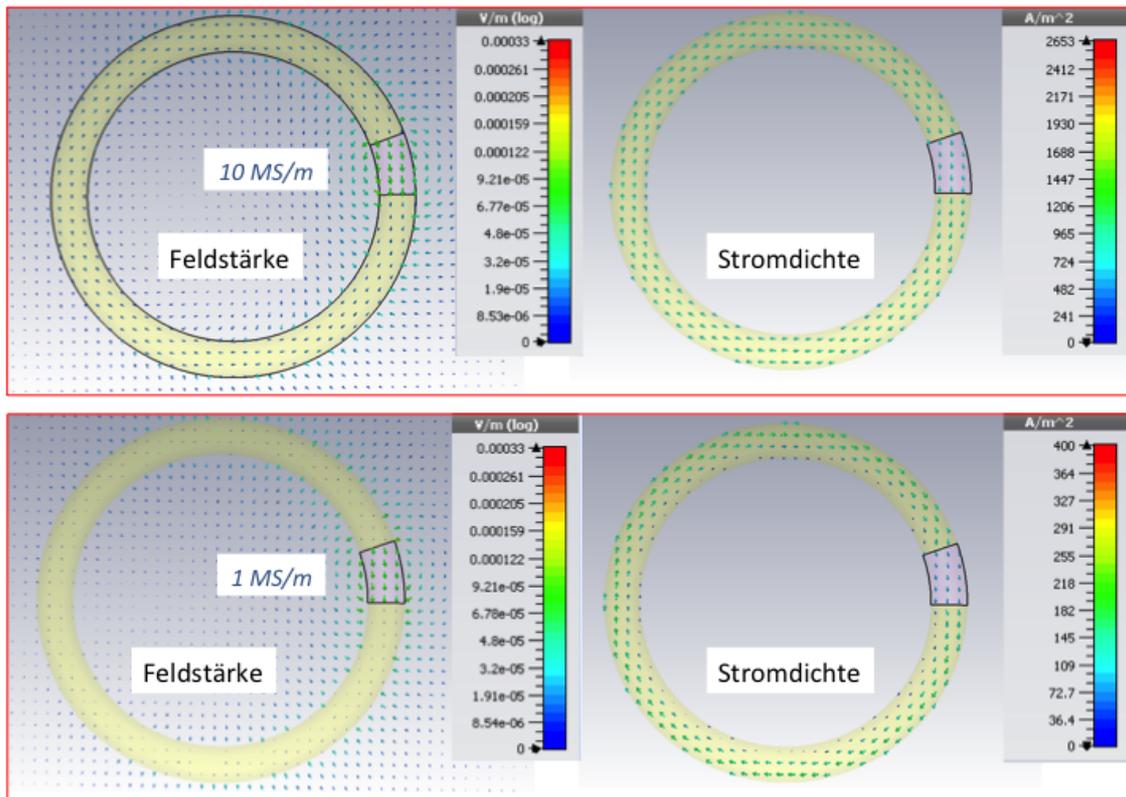
Lösungsbeispiel: In die Empfängerspule wurde ein Segment eines anderen Materials eingefügt. Über dessen Materialeigenschaften lässt sich die elektrische Leitfähigkeit manipulieren.

Folgende Abbildung zeigt Feldstärke und Stromdichte in der Empfängerspule mit einem Segment aus schlechter leitendem Material: (1) 10 MS/m und (2) 1 MS/m. Die Spule besteht aus Kupfer mit ca 58 MS/m.

Bei der Feldstärke zeigt sich der aus den Strömungsfeldern bekannte Effekt, dass diese desto größer ausfällt, je schlechter das Material ist. Mit sinkender Leitfähigkeit konzentriert sich das elektrische Feld über dem Segment.

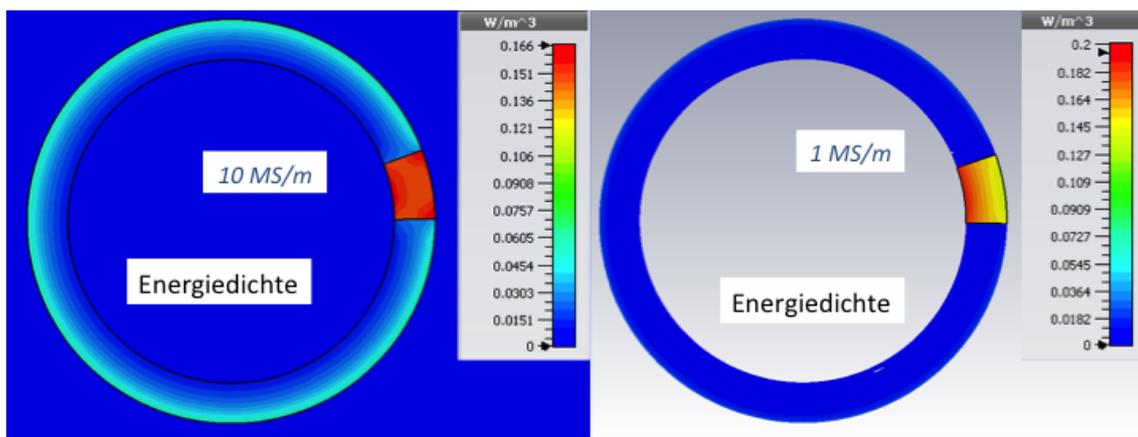
Die Stromdichte folgt gemäß der Materialgleichung der elektrischen Feldstärke. In der gewählten Geometrie muß hierbei die Stromdichte über dem Querschnitt der Empfangsspule konstant bleiben. Bei schlechter leitendem Material fällt die Stromdichte (bei konstanter Feldstärke) geringer aus.

Die beiden Extremfälle sind hierbei unmittelbar plausibel: (A) Ideal leitendes Material (Kurzschluss): maximale Stromdichte, jedoch keine Feldstärke. (B) Nicht leitendes Material (Luftspalt, offene Spule): maximale Feldstärke, jedoch kein Strom.



Da sich die Leistung aus dem Produkt aus Strom und Spannung errechnet, wird an diesen beiden Extremen dem Schaltkreis keine Leistung entnommen. Zwischen diesen beiden Extremen sollte sich ein Leistungsmaximum finden lassen, abhängig von der Leitfähigkeit des Segmentes (bzw. abhängig vom Lastwiderstand im Empfängskreis).

Folgende Abbildung zeigt die Energiedichte der elektrischen Verluste der Anordnung für die beiden Arbeitspunkte (1) und (2).



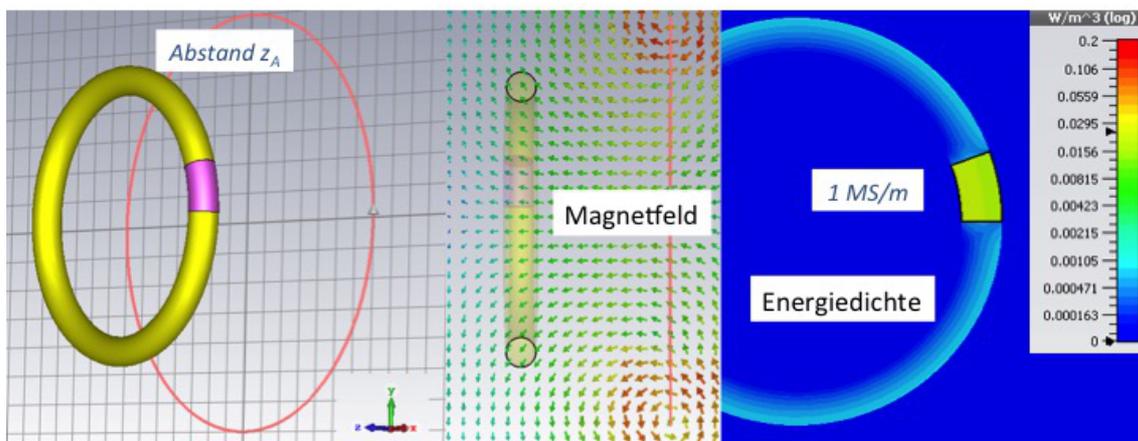
Man erkennt, dass die Energiedichte beim schlechter leitenden Material etwas höher ist und sich fast komplett auf das schlechter leitende Segment konzentriert.

Frage 5.4.3: Einfluss der Geometrie. Da die induzierte Feldstärke der Flussänderung durch die von der Empfangsspule umschlossene Fläche folgt, ist die induzierte Feldstärke abhängig von der Größe und geometrischen Anordnung der Empfangsspule. Diskutieren Sie diese Einflüsse zu-

nächst qualitativ: Welche Größe und Position der Empfangsspule ist günstig, welche Anordnungen sind ungünstig. Überprüfen Sie dann einzelne Fälle mit Hilfe der Simulation, indem Sie die Größe bzw. Lage der Empfangsspule verändern. Wie wäre induktives Laden elektrischer Geräte bzw. elektrisch betriebener Fahrzeuge am effizientesten zu realisieren?

Lösungsbeispiel: Offensichtliche Einflüsse sind (1) die Größe der Spule und (2) der Winkel zur Ebene der Erregerspule: Je größer die Apertur der Empfängerspule, desto größer der umschlossene magnetische Fluss. Neigt sich die Empfängerspule gegenüber der Ebene der Erregerspule, verringert sich der umschlossene magnetische Fluss.

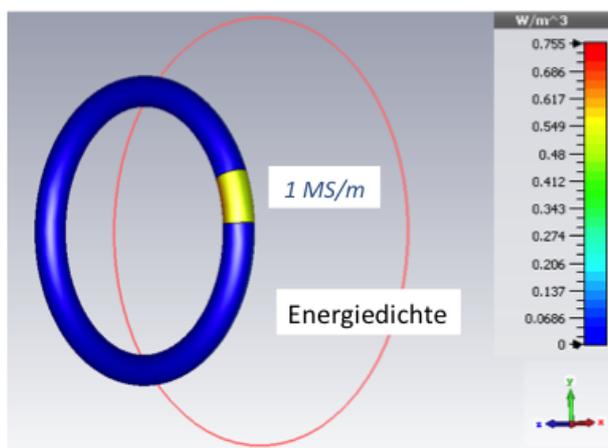
Wesentlichen Einfluss hat außerdem (3) der Abstand zur Erregerspule. Folgende Abbildung illustriert ein Beispiel hierzu.



Frage 5.4.4: Einfluss der Frequenz. Welchen Einfluss hat die Frequenz des Erregerstroms auf die induzierte Feldstärke? Woraus lässt sich dieser Zusammenhang folgern? Welches sind die Konsequenzen für die Energieausbeute bei einer induktiven Kopplung? Untersuchen Sie den Zusammenhang mit Hilfe der Simulation.

Zusatzfragen: Welches Einsparpotenzial ergäbe sich für einen Transformator, der statt mit 50 Hz mit 10 kHz betrieben würde? Mit welchen Frequenzen werden Schaltnetzteile, wie z.B. USB Netzteile betrieben?

Lösungsbeispiel: Die Anordnung aus dem letzten Beispiel blieb unverändert, bis auf die Frequenz des Erregerstroms. Ein Betrieb mit 500 Hz (statt 50 Hz) zeigt folgendes Ergebnis.

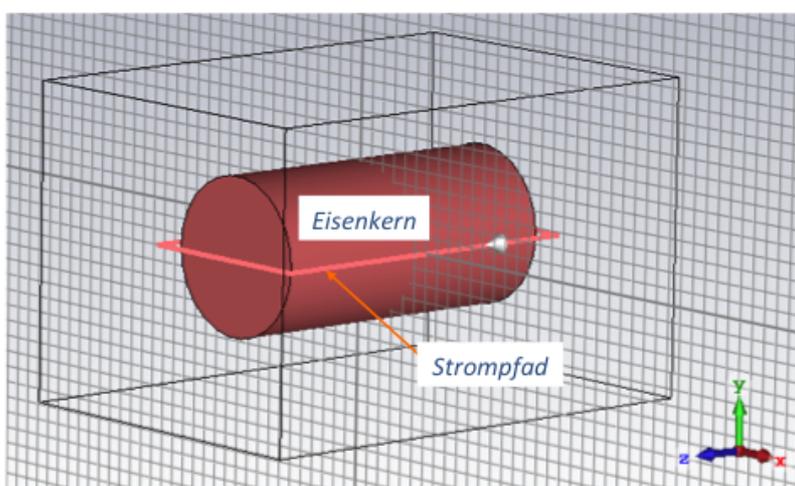


Die Energieausbeute hat sich nun deutlich erhöht. Da die induzierte elektrische Feldstärke proportional ist zur Änderung der magnetischen Flussdichte, wächst die induzierte elektrische Feldstärke bei harmonischer Anregung linear mit der Frequenz (siehe Gleichungen in Frage 5.1.4).

Die Leistung an einem Lastwiderstand hängt quadratisch vom Signalpegel ab (vgl. $P = U I = U^2/R = I^2 R$). Somit wächst die übertragene Energie bei der induktiven Kopplung quadratisch mit der Schaltfrequenz. Bei konstanter Energie sind durch Erhöhung der Schaltfrequenz Materialeinsparungen möglich.

5.5. Induktionsmaschine

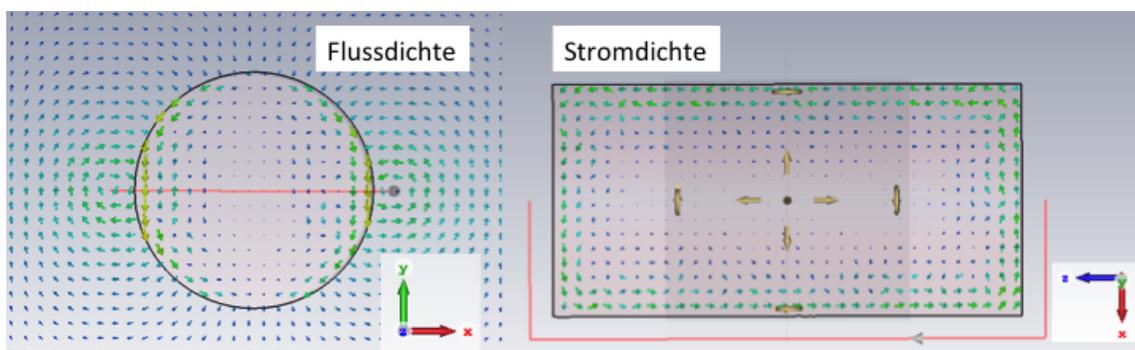
Eine Induktionsmaschine (Asynchronmaschine) besteht im wesentlichen aus einem Eisenkern, der sich im Inneren von Spulen befindet, die ein Drehfeld erzeugen. Folgende Abbildung zeigt eine solche Anordnung mit einem Strompfad als Spule.



Der Eisenkern kann z.B. den Rotor darstellen, der Strompfad eine der Spulen im Stator.

Frage 5.5.1: Eisenkern in einer Leiterschleife. Beschreiben Sie die Effekte, die bei dieser Anordnung auftreten, wenn der Strompfad mit einem periodischen Strom z.B. der Frequenz 50 Hz beaufschlagt wird. Welchen Bedeutung hat die Leitfähigkeit des Kerns? Untersuchen Sie die Effekte in der Simulation.

Lösungsbeispiel: Es wurde ein schlecht leitendes Material mit Leitfähigkeit 1 MS/m verwendet.

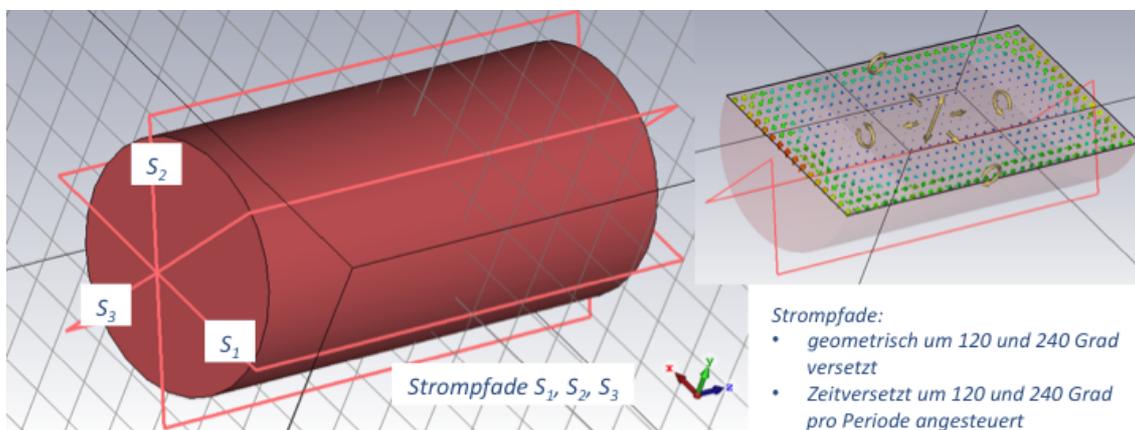


Die magnetische Flussdichte durchsetzt den Kern so, dass ein Wirbelstrom induziert wird, der dem Erregerstrom entgegen wirkt.

Frage 5.5.2: Eisenkern im Drehfeld. Erzeugen Sie mit Hilfe dreier Strompfade in geeigneter geometrischer Anordnung mit geeigneter zeitlicher Ansteuerung ein sogenanntes Drehfeld im Stator. Un-

tersuchen Sie Felder und Ströme in der Simulation. Erklären Sie die Effekte. Was wäre die Konsequenz bei einem beweglichen (d.h. um die z-Achse drehbar gelagerten) Rotor?

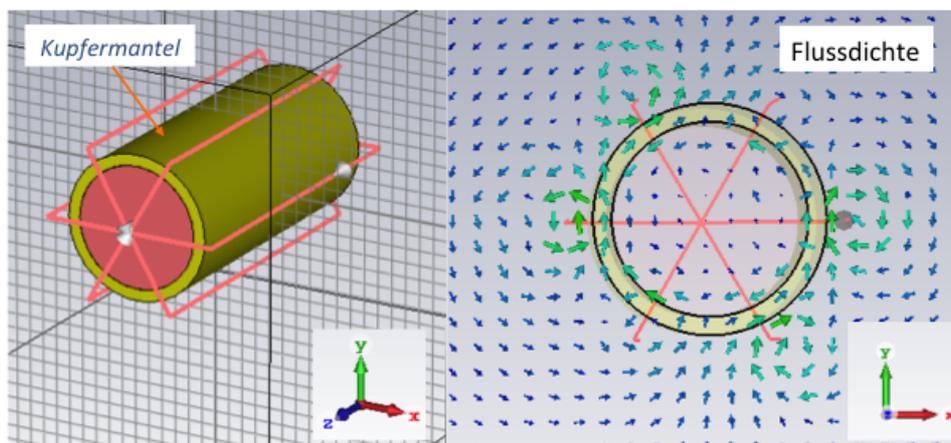
Lösungsbeispiel: Die drei Strompfade teilen sich den Querschnitt des Kerns zu gleichen Teilen auf, die Spulen sind also zueinander um jeweils $360/3 = 120$ Grad versetzt.



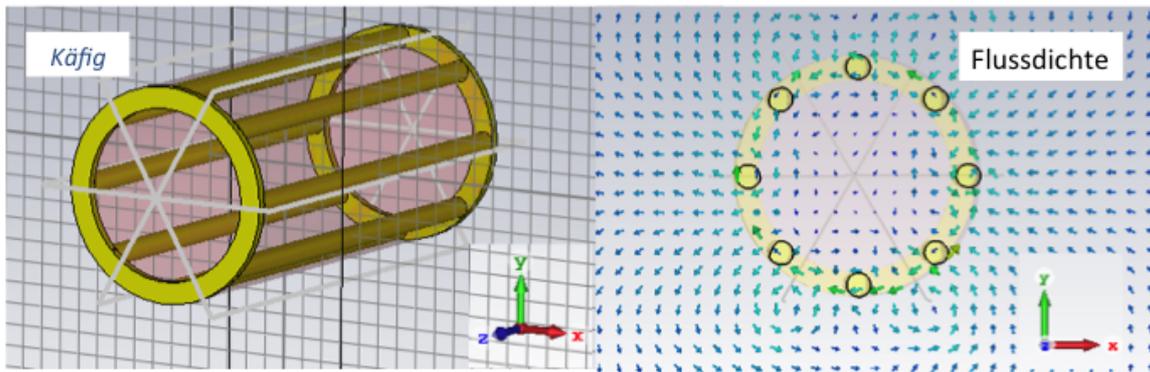
Steuert man diese drei Spulen nun zeitversetzt an, so dass innerhalb einer Periode alle Spulen mit gleichen zeitlichen Abständen angesteuert werden (d.h. phasenversetzt mit 0, 120 und 240 Grad), so ergibt sich ein Drehfeld. Diese Anordnung entspricht dem Zündverteiler bei einem 3-zylindrigen Kolbenmotor.

Das Drehfeld und die induzierten Ströme lassen sich am besten in animierter Darstellung beobachten. Ein Beispiel findet sich hier: [Induktionsmaschine](#).

Frage 5.5.3: Verlustleistung und Wirkungsgrad. Eine auf diese Weise aufgebaute Maschine wäre nicht praktikabel, da sie sich wegen der hohen Eisenverluste zu stark erwärmt und da sie einen sehr schlechten Wirkungsgrad besitzt. Ein Aufbau des Eisenkerns aus Blechen in axialer Richtung würde die Wirbelströme zwar verhindert, somit aber auch das Funktionsprinzip der Maschine. Die in folgender Abbildung gezeigte Maschine hat einen Zylindermantel aus Kupfer, um die Wirbelströme möglichst verlustfrei zu führen. Würde diese Maschine funktionieren?

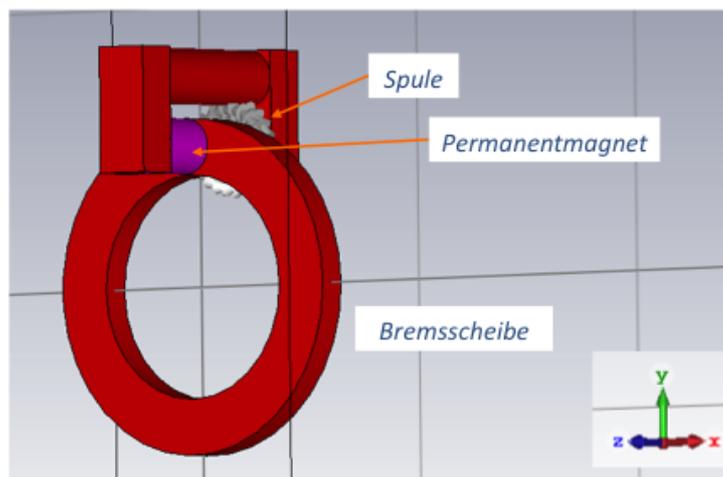


Frage 5.5.4: Käfigläufer. In der Praxis realisiert man die Führung der Wirbelströme durch einen Käfigläufer. Der Eisenkern ist axial geblecht. Erläutern Sie das Funktionsprinzip dieser Maschine. Worin bestehen die Unterschiede zum homogenen Eisenkern (Fragen 5.5.1 und 5.5.2) und zum Zylindermantel aus Kupfer (Frage 5.5.3)?



5.6. Wirbelstrombremse

Wenn man ein magnetisches Material unter einem Permanentmagneten bewegt, entsteht eine Bremswirkung. Der Effekt lässt sich für lineare Bremsen nutzen, bzw. für Wirbelstrombremsen mit Brems Scheiben, wie in folgender Abbildung gezeigt.



Frage 5.6.1: Erläutern Sie das Funktionsprinzip mit Hilfe der Feldgleichungen. Wie entstehen die Wirbelströme? Wieso tritt eine Bremswirkung durch die Wirbelströme ein?

Frage 5.6.2: Wie liesse sich eine lineare Wirbelstrombremse aufbauen? Recherchieren Sie nach Lösungen für Fahrgeschäfte (Achterbahnen, Falltürme, ...). Wie wird die Betriebssicherheit festgestellt (auch bei Stromausfall)?

Frage 5.6.3: Simulation. Hinweis: Zur Simulation bewegter Teile und nicht sinusförmiger Signale benötigt man den „Low Frequency Time Domain Solver“, der leider in der Student Edition von CST-Studio nicht enthalten ist. Daher ist hier nur eine statische Simulation ohne Wirbelströme möglich, z.B. zum Deaktivieren des Permanentmagneten durch eine Spule mit Gleichstrom. So liesse sich die Bremse elektrisch öffnen.

Frage 5.6.4: Linearmotor. Wie liesse sich ein Linearmotor aufbauen? Erläutern Sie das Funktionsprinzip und skizzieren Sie ein Beispiel für eine Realisierung.

6. Elektromagnetische Wellenfelder

6.1. Feldgleichungen

Elektromagnetische Wellen werden durch die allgemeinen Maxwell Gleichungen beschrieben, in denen nun keine Vereinfachungen mehr enthalten sind.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{Durchflutungsgesetz}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{Quellen}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{Materialgleichungen (Flussdichten in Abhängigkeit der Feldstärken)}$$

Neu gegenüber den vergangenen Abschnitten ist das durch Änderungen der elektrischen Flussdichte erzeugte Magnetfeld: $\operatorname{rot} \vec{H}_v = \partial \vec{D} / \partial t$. Nun sind elektrische und magnetische Felder vollständig gekoppelt und induzieren sich wechselseitig. Ein elektrisches Wirbelfeld induziert über die Änderung der elektrischen Flussdichte wiederum ein magnetisches Wirbelfeld, auch in stromfreien Bereichen ($\vec{J} = 0$). Diese Kopplung ist für die Entstehung elektromagnetischer Wellen verantwortlich.

Potentiale

Die numerische Feldberechnung erfolgt, wie in den vorausgegangenen Abschnitten bereits beschrieben, mit Hilfe von Potentialen. In Gebieten mit $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ kann die elektrische Feldstärke als Gradient eines elektrischen Skalarpotentials dargestellt werden:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi \quad \text{elektrisches Skalarpotential}$$

In Gebieten mit $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ kann die magnetische Feldstärke als Gradient eines magnetischen Skalarpotentials dargestellt werden:

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \phi_m \quad \text{magnetisches Skalarpotential}$$

Bei stromführenden Gebieten innerhalb elektrischer Leiter erfolgt die Berechnung des Magnetfeldes entweder direkt aus der Stromdichte, oder es findet das magnetische Vektorpotential Anwendung. Das Prinzip ist auch auf elektrische Wirbelfelder anwendbar.

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \text{magnetisches Vektorpotential}$$

In Gebieten mit unterschiedlichen Voraussetzungen bezüglich Wirbeln und Quellen lassen sich nach dem Überlagerungsprinzip die Untersuchungen fallweise durchführen. Als Beispiel sei die Berechnung der magnetische Feldstärke innerhalb und außerhalb stromführender Leiter genannt.

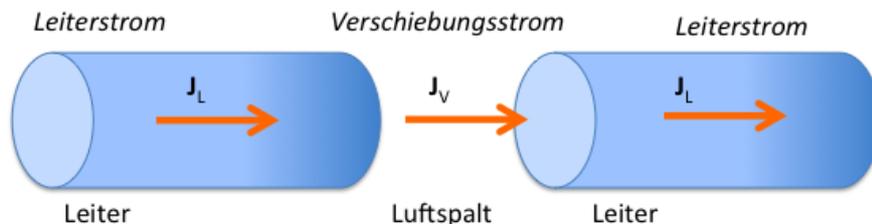
Aufgaben

Frage 6.1.1: Verschiebungsstrom. Das Durchflutungsgesetz in der vollständigen Form lässt sich im Zusammenhang mit den Materialgleichungen so interpretieren, dass die Stromdichte aus zwei Anteilen besteht: der Leitungsstromdichte \vec{J}_L und der Verschiebungsstromdichte \vec{J}_V .

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_V = \sigma \vec{E} + \dot{\vec{D}} = \sigma \vec{E} + \epsilon \dot{\vec{E}}$$

Wie verhalten sich beide Anteile in einem leitenden Material (σ) bzw. einem nicht leitenden Material (ϵ)? Wann tritt ein Verschiebungsstrom \vec{J}_V auf?

Lösung: In einem Leiter überwiegt der Leitungsstrom ($\vec{J}_L \gg \vec{J}_V$). In einem Isolator (Nichtleiter) überwiegt der Verschiebungsstrom ($\vec{J}_V \gg \vec{J}_L$), siehe folgende Abbildung.



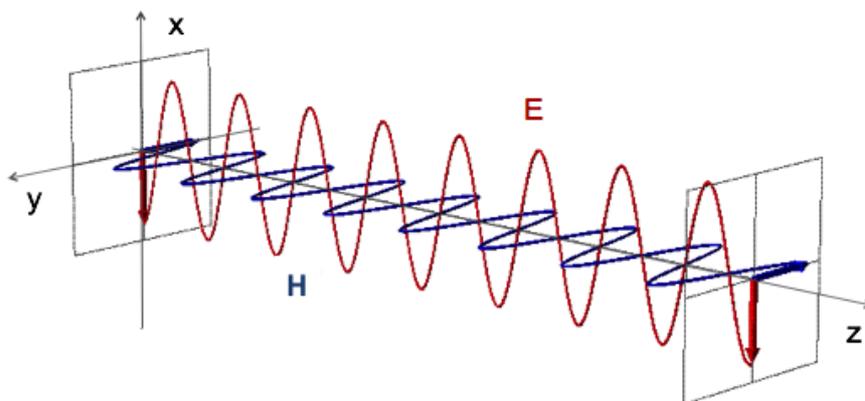
Verschiebungsströme treten nur bei zeitlichen Änderungen auf, z.B. beim Aufladen oder Entladen eines Kondensators im Dielektrikum, bzw. bei der Wellenausbreitung im freien Raum auch ohne Leiterstrom.

Frage 6.1.2: Frequenzabhängigkeit des Verschiebungsstroms. Bringen Sie die Gleichung für die Stromdichte aus 6.1.1 in komplexe Schreibweise (Phasoren) und untersuchen Sie die Abhängigkeit des Verschiebungsstroms von der Frequenz. Bis zu welchen Frequenzen kann man innerhalb eines Leiters den Verschiebungsstrom vernachlässigen?

Lösung: $\vec{J} = \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E} = (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{E}$

Mit $\epsilon \approx 10^{-11} \text{ As/Vm}$ und einer Leitfähigkeit von $\sigma \approx 10^6 \text{ A/Vm}$ ist $|\omega \epsilon| \approx \sigma$ in einem Leiter erst bei $\omega \approx \sigma/\epsilon \approx 10^{17} \text{ 1/s}$ bzw. $f \approx 10^{16} \text{ Hz}$.

Frage 6.1.3: Elektromagnetische Wellenfelder. Die Feldstärke der in folgender Abbildung gezeigten ebenen Welle ist beschrieben durch: $\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x \hat{E} \sin(\omega t - \beta z)$. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke H , die Wellenlänge λ , sowie den Wellenwiderstand R_0 des freien Raumes.



Hinweis: Im freien Raum gelten $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ und $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Mit \vec{e}_x ist der Einheitsvektor in x-Richtung bezeichnet, d.h. die Feldstärke \vec{E} besitzt nur eine Komponente in der x-Ebene. Die Ausbreitungskonstante β gilt $\beta = 2\pi/\lambda = \omega/c$. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit beträgt $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

Lösung: Aus $\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ folgt $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\beta \hat{E} \cos(\omega t - \beta z) = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$ und somit

$\vec{H}(z, t) = \vec{e}_y \frac{\beta}{\omega \mu_0} \hat{E} \sin(\omega t - \beta z)$. Unter Verwendung der Beziehungen $\beta = \omega/c$ und $1/c =$

$\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ folgt hieraus $\vec{H}(z, t) = \vec{e}_y \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{E} \sin(\omega t - \beta z)$.

Elektrische Feldstärke und magnetische Feldstärke sind somit phasensynchron und schwingen in zueinander orthogonalen Ebenen, wie in der Abbildung oben gezeigt.

Wellenlänge: Aus der Ausbreitungskonstanten β folgt: $\lambda = 2\pi/\beta = 2\pi c / \omega$.

Wellenwiderstand des Freiraums: $R_0 = |E_x| / |H_y| = \sqrt{(\mu_0 / \epsilon_0)}$.

Frage 6.1.4: Wellengleichungen. Für ebene Wellen im Freiraum lauten die Maxwell Gleichungen:

$\text{rot } \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ und $\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. Leiten Sie hieraus die Wellengleichungen für die elektrische Feldstärke und die Magnetische Feldstärke ab. Hinweis: Wellengleichungen haben die Form $c^2 \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2}$.

Lösung: Erneute Anwendung des Operators rot und Vertauschung der Reihenfolge mit der zeitlichen Ableitung ergibt:

$$\text{rot rot } \vec{H} = \epsilon_0 \text{rot } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Die Beziehung $\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad}(\text{div } \vec{H}) - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H}$, da das magnetische Feld quellenfrei ist.

Somit gilt:

$$\Delta \vec{H} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \text{ als Wellengleichung für das magnetische Feld.}$$

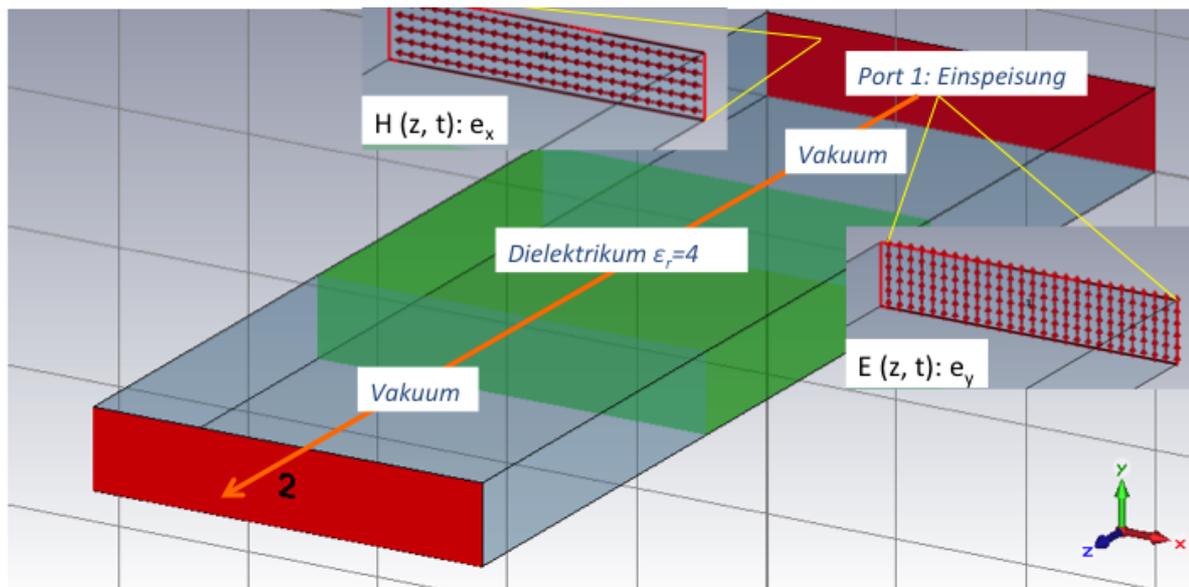
Sinngemäß folgt auf dem gleichen Lösungsweg:

$$\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ als Wellengleichung für das elektrische Feld.}$$

Auch das elektrische Feld ist als Wirbelfeld quellenfrei.

6.2. Ebene Wellen

Der Einfluss des Dielektrikums auf die Ausbreitung einer ebenen transversalen Welle im Freiraum soll untersucht werden. Eine Vorlage hierfür finden Sie bei den Beispielen im CST Studio unter dem Titel „Plane Wave Normal Incident“ (deutsch: ebene Welle mit normaler Einfallrichtung). Die Welle passiert hierzu aus dem Freiraum ein Dielektrikum und tritt aus diesem wieder in den Freiraum aus. Folgende Abbildung beschreibt die Anordnung.

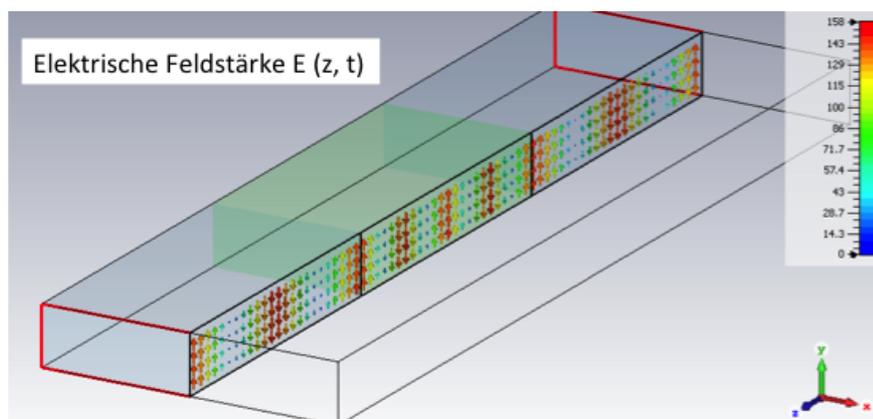


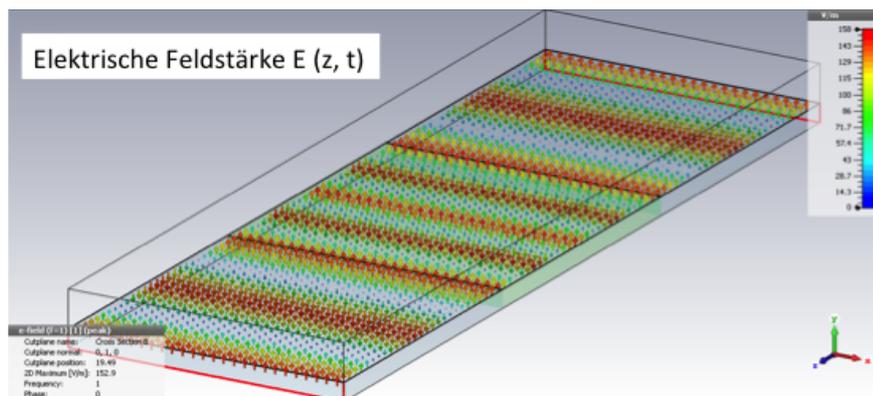
Frage 6.2.1: Laden bzw. Modellieren Sie die Anordnung. Die transversale elektromagnetische Welle soll so schwingen, dass die elektrische Feldstärke in y-Richtung schwingt, und die magnetische Feldstärke in x-Richtung. Hierfür ist der Port der Einspeisung (Port 1) geeignet zu konfigurieren. Die Welle soll sich in z-Richtung ausbreiten.

Frage 6.2.2: Randbedingungen der Simulation. Vakuum und Dielektrikum werden als Raumausschnitt modelliert (Quader in Ausbreitungsrichtung z). Um Freiraumbedingungen nachzustellen, müssen die Kantenflächen des Quaders geeignet vorgegeben werden. Unter dem Menüpunkt „Boundaries“ stellen Sie die Randwerte so ein, dass die Welle in der vorgegebenen Richtung schwingen kann, d.h. an den Kantenflächen in x-Richtung ist $H_x = 0$ (keine transversale Komponente der magnetischen Feldstärke in der yz-Ebene), an den Kantenflächen in y-Richtung ist $E_y = 0$ (keine transversalen Komponenten des elektrischen Feldes in der xz-Ebene).

Frage 6.2.3: Simulation. Führen Sie die Simulation durch. Das Programm verfügt auch über einen Animationsmodus für die Wellenbewegung. Folgen Sie hierfür den Anweisungen aus dem Beispiel. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse auf Plausibilität.

Lösungsbeispiel:

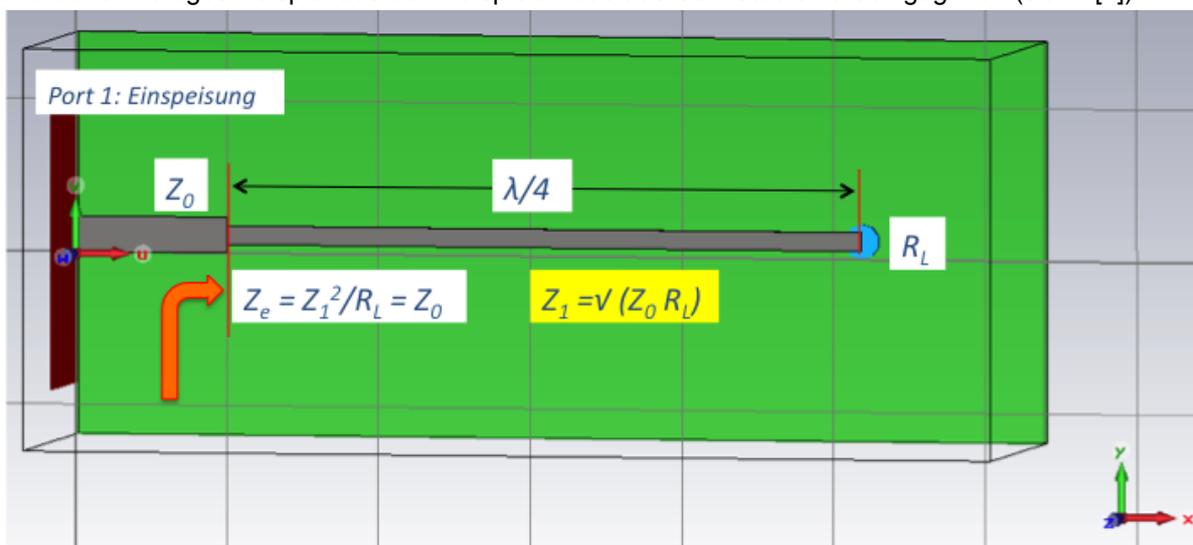




Frage 6.2.4: Analyse. Untersuchen Sie den Einfluss des Dielektrikums auf die Wellenausbreitung mit Hilfe der elektrischen Feldstärke. Welche Bedingungen ergeben sich an den Grenzflächen? Welchen Einfluss hat das Dielektrikum auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit v der Welle? Welchen Wert nimmt die Ausbreitungsgeschwindigkeit bei der gegebenen Permittivität des Dielektrikums an? Welchen Einfluss hat das Dielektrikum somit auf die Wellenlänge? Was würde bei schrägem Einfall der Welle auf das Dielektrikum geschehen?

6.3. Mikrostreifenleiter

Als Beispiel für eine HF-Schaltung sei ein Viertelwellentransformator gewählt, der in Mikrostreifenleitertechnik realisiert ist. Das Schaltungsdesign ist in diesem Kontext nicht von Bedeutung, daher wird auf ein fertiges Beispiel aus den Beispielen des aus CST Studio zurück gegriffen (siehe [2]).



Frage 6.2.1: Analysieren Sie das Prinzip der Schaltung. Eine gegebene Punktlast mit Impedanz R_L soll an eine gegebene Leitung mit dem Wellenwiderstand Z_0 angeschlossen werden. Ein direkter Anschluss führt zu einer Fehlanpassung: An der Grenzfläche entstehen Reflexionen, die Leistung der Quelle kann nicht zur Last transferiert werden. Eine Viertelwellenleitung mit Wellenwiderstand Z_1 transformiert die Last R_L in die Eingangsimpedanz $Z_e = Z_1^2/R_L$. Wie muß Z_e gewählt werden, damit es keine Reflexionen gibt? Welchen Wert benötigt man für den Wellenwiderstand Z_1 der Viertelwellenleitung? Hinweis: Der Wellenwiderstand ist abhängig von der Geometrie (Breite des Leiterstreifens) und kann daher geeignet gewählt werden. Wellenwiderstände verlustloser Leitungen sind reell, ebenso der Lastwiderstand.

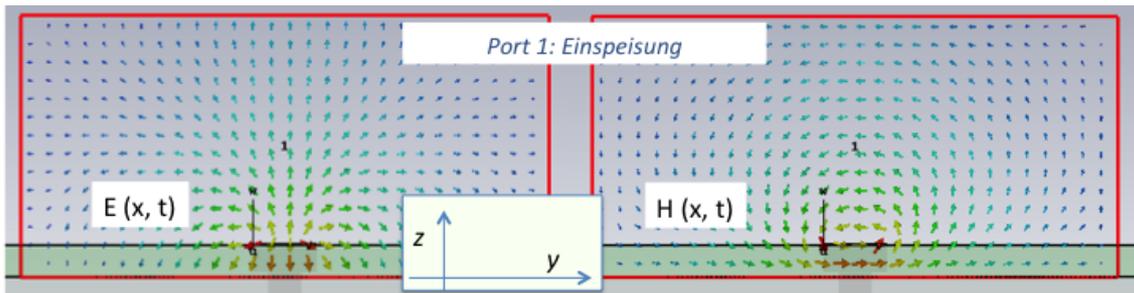
Lösung: Um Reflexionen zu vermeiden, muss $Z_e = Z_0$ sein. Unter dieser Vorgabe errechnet man Z_1 zu $Z_1 = \sqrt{Z_0 R_L}$. Die Schaltung aus dem Beispiel ist bereits fertig hierfür dimensioniert.

Frage 6.2.2: Welche Rolle spielt die Länge der Leitung mit Wellenwiderstand Z_0 unmittelbar nach der Einspeisung? Wie muss die Einspeisung ausgelegt werden, um korrekt in die Mikrostreifen-leitung einzukoppeln?

Lösung: Die Länge einer angepassten Leitung spielt keine Rolle, daher ist die Länge des ersten Leitungsstückes nicht von Bedeutung. Die Einspeisung muss im korrekten Modus

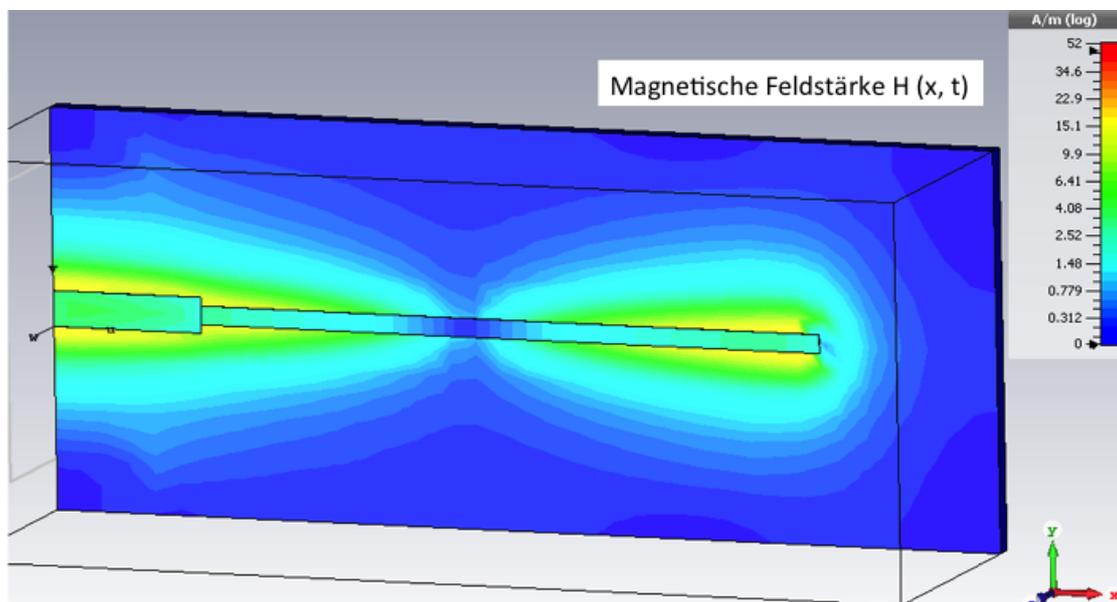
Frage 6.2.3: Simulieren Sie das Beispiel. Untersuchen Sie die elektrischen und magnetischen Felder bei der Einspeisung in die Leitung und auf der Leitung. In welcher Richtung schwingen die Felder? In welcher Richtung breiten sie sich aus? Sind die Felder transversal? Sind die Felder eben?

Lösungsbeispiel:



Frage 6.2.4: Anpassung und Reflexionen. Animieren Sie die Felder in der Simulation. Funktioniert die Anpassung? Gibt es Reflexionen? Hinweis: Wählen Sie hierzu unter den 2D/3D Results das E- oder H-Feld. Im Menüpunkt „2D/3D Plot“ findet sich dann eine Schaltfläche „Animate Fields“.

Lösungsbeispiel:



6.4. Wilkinson-Leistungsteiler

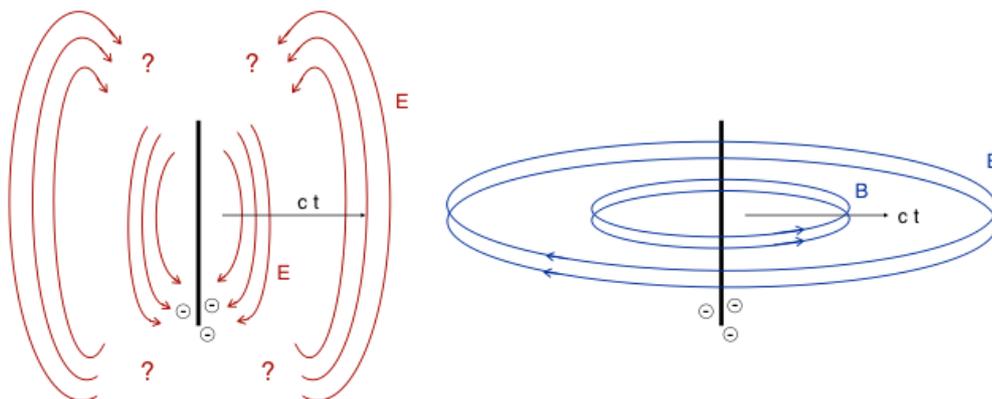
...

6.5. Dipolantenne

Das Feld eines einfachen Halbwellen-Dipols soll untersucht werden. Die Antenne lässt sich aus einem Leiter der Länge $\lambda/2$ leicht konstruieren. CST Studio enthält ein fertiges Beispiel, siehe „Wire

Antenna – Half-Wavelength Dipole“ unter [2]. Laden Sie das Beispiel bzw. modellieren Sie ein eigenes Design nach den Anleitungen dort.

Frage 6.4.1: Funktionsprinzip. Bei einem Dipol konkurriert die periodische Bewegung der Ladungen auf dem Leiter mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit). Es kommt zur Abschnürung von Feldlinien. Analysieren und diskutieren Sie das Funktionsprinzip an folgender Skizze.

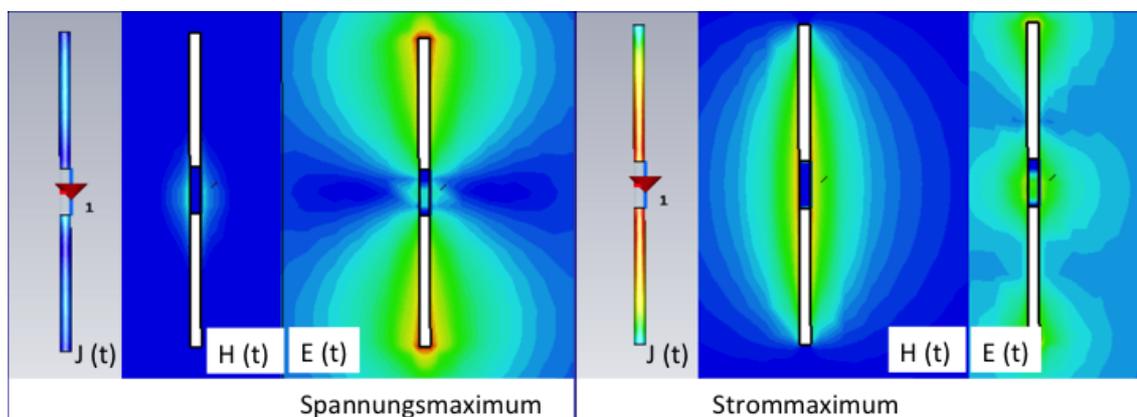


Frage 6.4.2: Fernfeld und Nahfeld. Was versteht man unter Nahfeld und Fernfeld? Welche Phasenbeziehung gibt es zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke jeweils? Welcher Satz an Maxwell Gleichungen gilt im Fernfeld? Was bedeutet dies für die Phasenbeziehung? Wie erklären sich die Unterschiede zum Nahfeld? Was bedeutet Resonanz? Gibt es vergleichbare akustische Phänomene?

Frage 6.4.3: Eingangsimpedanz. Skizzieren Sie das Funktionsprinzip eines Halbwellen-Dipols (der Dipol besitzt die Länge einer Halbwelle, jeder Zweig somit eine Viertelwelle). Wo sind für eine stehende Welle Strommaxima? Wo sind Spannungmaxima? Welche Eingangsimpedanz besitzt ein Halbwellen-Dipol? Führen Sie die gleiche Untersuchung für einen λ -Dipol durch. Welche Konsequenzen für die Einspeisung hat die Eingangsimpedanz?

Frage 6.4.4: Simulation. Untersuchen Sie den Dipol in in der Simulation. Untersuchen Sie die Felder. Animieren Sie die Simulation und analysieren Sie Nahfeld und Fernfeld. Welche Richtcharakteristik hat der Dipol? Was versteht man unter Antennengewinn? Was versteht man unter Richtwirkung? Wie könnte man Antennen mit Richtwirkung konstruieren?

Lösungsbeispiel:



6.6. Dipolzeile

...
...
...
...

7. Seminararbeit

Thema: Freies Thema. Wählen Sie eine eigene Aufgabenstellung zur numerischen Feldberechnung. Sprechen Sie Ihr Thema mit dem Dozenten ab. Führen Sie die Feldberechnung aus Ihrer Aufgabenstellung durch. Dokumentieren Sie die Aufgabe, Ihre Vorgehensweise und die Ergebnisse.

Die Dokumentation erfolgt in Form eines Laborberichts und sollte folgende Punkte beinhalten:

1. Beschreibung der Aufgabenstellung
2. Erstellung des Modells
3. Durchführung der Simulation
4. Beschreibung der Ergebnisse
5. Zusammenfassung
6. Quellenverzeichnis
7. Anhänge mit den relevanten Projektdateien sowie, sofern dem Verständnis dienlich, detaillierte Beschreibung der Modelle bzw. zur Berechnungen zur Schaltung, Simulationsläufe, Messreihen etc.

Die Seminararbeit ist eine Prüfungsleistung für Teil 2 der Veranstaltung. Die Seminararbeit wird in Form einer Teilnote bewertet. Wahlweise kann auch die Prüfungsleistung für Teil 1 der Veranstaltung (Grundlagen, theoretischer Teil) in Absprache mit dem Dozenten als Seminararbeit erbracht werden (als Alternative zu einer Klausur). In diesem Fall kann ein gemeinsames Dokument für beide Themen der Seminararbeit abgegeben werden. Beide Teile werden für die Gesamtnote mit jeweils 50% gewichtet.

Hinweis: Falls Ihre Studienarbeit eine Feldberechnung oder passende Analyse als Thema einschließt, können Sie auch diese Inhalte und Ergebnisse für die Seminararbeit verwenden und ausbauen.

8. Themen für die Seminararbeit

Folgende Themen sollen als Anregungen für eigene, weiterführende Untersuchungen im Rahmen der Seminararbeit verstanden werden. Es stehen jeweils die Methoden und Grundlagen im Vordergrund. Das Thema der Seminararbeit kann frei in Absprache mit dem Dozenten gewählt werden.

Themenvorschläge

- Linearmotor
- Hochspannungsisolator
- Leiterbündel für Hochspannungstrassen
- Übertrager für Leistungselektronik: auch mit höheren Frequenzen, z.B. 5 bis 50 kHz
- Mikrostreifenleiter
- HF-Filter
- Antennen
- Freies Thema: Wählen Sie eine eigene Fragestellung als Thema, die Sie mit Hilfe der Feldtheorie und der numerischen Methoden untersuchen. Das Thema darf durchaus auch von beruflichem Interesse sein. Im Rahmen der Seminararbeit kann dann eine erste Voruntersuchung erfolgen.

Themen aus vergangenen Seminararbeiten

- Induktives Kochen
- Auswirkung elektromagnetischer Felder auf Herzschrittmacher
- Transformatorische Kopplung beim Übersprechen von Steckverbindern
- Miniaturisierung von Antennen im GHz-Bereich
- Untersuchungen an Isolatoren in der Mittelspannungsebene
- Empfangseigenschaften einer RFID-Antenne
- Simulation einer 868 MHz Antenne für ein Kollisionswarnsystem
- Virtueller Luftspalt für eine Spule zur Erdschlusskompensation durch Überlagerung von Feldern
- Simulation eines RJ45 Steckers von 2 MHz bis 2 GHz
- Induktiv gekoppelte Widerstandsmessung
- Induktives Laden
- Untersuchung an Sonden für die zerstörungsfreie Prüfung mit Wirbelströmen

- Feldsimulation einer RFID-Antenne in einem Elektrowerkzeug
- Untersuchung unterschiedlicher Möglichkeiten zur Auslegung von Antennen
- Simulation eines Linearmotors für den Modellbau
- Magnetostatische Simulation einer Reluktanzmaschine
- Magnetfelder eines Schrittmotors im Mikroschrittbetrieb
- Simulation der elektrischen Feldstärken an einem Touchscreen
- Induktive Abtastung einer Modulatorscheibe
- Simulation von Stromverbindern (Stromabnehmer)
- Untersuchung von Lötstellen bei Hochspannung
- Simulation von Beamforming und Dipol- und Microstrip-Antennen
- Simulation einer Schmetterlingsantenne
- Kapazitive Touch-Sensorik
- Induktionskochfeld
- Linearmotor
- Kalibration von Stromwandlern
- Elektromagnetische Feldsimulation einer stromkompensierten Drossel
- Modellierung einer kollinearen Koaxialantenne
- Kontaktlose Energieübertragung
- Untersuchung und Design eines Hohlleiterfilters
- Simulation einer Zündspule
- ...

Englisch - Deutsch

Action at a distance	Fernwirkung
Boundary conditions	Randwerte, Randbedingungen
Bushing	Hochspannungsdurchführung
Complementary solution	homogene Lösung (einer Differenzialgleichung)
Conservative field	Quellenfeld (= wirbelfreies Feld)
Contiguous action	Nahwirkung
Curl	Wirbel (auch für die Wirbeldichte rot)
Coil	Spule
Del	Nabla Operator (Δ)
Eddy current	Wirbelstrom
Life terminal	spannungsführende Klemme
Rotational field	Wirbelfeld (= quellenfreies Feld)
Perfect Electric Conductor	ideal leitendes Material
Spherical Capacitor	Kugelkondensator
...	

Abkürzungen und Konstanten

B	Magnetische Flussdichte [Tesla] = [Vs/m ²]
E	Elektrische Feldstärke [V/m]
D	Elektrische Flussdichte [Coulomb/m ²] = [As/m ²]
H	Magnetische Feldstärke [A/m]
J	Stromdichte (Flussdichte der Strömung) [A/m ²]
ϵ	Permittivität [Coulomb/Vm] = [As/Vm] = [Farad/m]
μ	Permeabilität [Vs/Am] = [Henry/m]
σ	Konduktivität [A/Vm] = [Siemens/m]
ρ	elektrische Ladungsdichte [Coulomb/m ³] = [As/m ³]
ϕ	skalares elektrisches Potential [V]
ϕ_m	skalares magnetisches Potential [A]
A	magnetisches Vektorpotential [Tesla m] = [Vs/m]

$\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$ Leitfähigkeit (Permittivität) im Vakuum

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ Leitfähigkeit (Permeabilität) im Vakuum

PEC Perfect Electric Conductor

Literatur

- (1) Software CST Studio Suite Student Edition: <https://www.cst.com/academia/student-edition>
- (2) Projektbeispiele und Anleitungen zum CST Studio: <https://www.cst.com/academia/examples>
- (3) Adolf J. Schwab, [Begriffswelt der Feldtheorie](#): Elektromagnetische Felder, Maxwell Gleichungen, Gradient. Rotation, Divergenz; Springer, 2013 (7. Aufl.), ISBN 978-3-642-34566-1

Zur Vertiefung:

- (4) Wolfgang Schätzing, Günter Müller, FEM für Praktiker, Band 4: Elektrotechnik: Basiswissen und Arbeitsbeispiele zu FEM-Anwendungen in der Elektrotechnik. Lösungen mit dem Programm ANSYS®, Verlag expert; 2013 (3. Auflage), ISBN 978-3816931836
- (5) Thomas Westermann, Modellbildung und Simulation: Mit einer Einführung in ANSYS, Springer, 2010, ISBN 978-3-642-05460-0
- (6) Edward M. Purcell, David J. Morin, Electricity and Magnetism, Verlag Cambridge University Press, 2013 (3.Auflage), ISBN 978-1107014022
- (7) Heino Henke, Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung, Verlag Springer Vieweg, 2015 (5. Auflage), ISBN 978-3662469170

Anhang A – Elektromagnetische Felder

Elektromagnetische Felder werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

Stationäre elektrische Strömungsfelder:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{Gleichung 1/7})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{Gleichung 2/7})$$

Die Stromdichte ist proportional zur elektrischen Feldstärke. Hierbei kennzeichnet die Materialkonstante σ die Leitfähigkeit des Materials. Die Stromdichte erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld.

Elektrostatische Felder:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{Gleichung 3/7})$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \text{bzw.} \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{Gleichung 4/7})$$

Die elektrische Flussdichte ist proportional zur elektrischen Feldstärke. Hierbei kennzeichnet die Materialkonstante ϵ die Permittivität des Materials. Die Quellen elektrischer Felder sind Ladungen.

Magnetische Felder:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{Gleichung 5/7})$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{Gleichung 6/7})$$

Die magnetische Flussdichte ist proportional zur magnetischen Feldstärke. Hierbei kennzeichnet die Materialkonstante μ die Permeabilität des Materials. Magnetische Felder sind quellenfrei.

Quasistationäre elektromagnetische Felder:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Gleichung 7/7})$$

Änderungen der magnetischen Flussdichte erzeugen elektrische Wirbelfelder.

Diese Gleichungen lassen sich nach folgendem Schema ordnen:

Feldgleichungen:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Quellen:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Materialgleichungen:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Die Gleichungen lassen sich wie folgt interpretieren:

- **Feldgleichungen:** Die Feldgleichungen zeigen den Zusammenhang von Feldstärke und Strömen bzw. zeitlichen Änderungen der Flussdichten.
- **Quellen:** Die Quellen elektrostatischer Felder sind Ladungen. Magnetische Felder sind quellenfrei.
- **Materialgleichungen:** Die Materialgleichungen beschreiben den Zusammenhang von Feldstärken und Flussdichten. Materialeigenschaften werden hierbei durch die Materialkonstanten beschrieben: der elektrischen Leitfähigkeit (σ), der elektrischen Permittivität ($\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$), sowie der magnetischen Permeabilität ($\mu = \mu_r \mu_0$).

Anhang B – Geometrische Berechnungen

Kreisumfang

Der Kreisumfang berechnet sich aus der Summe der Linienelemente $dl = r d\varphi$

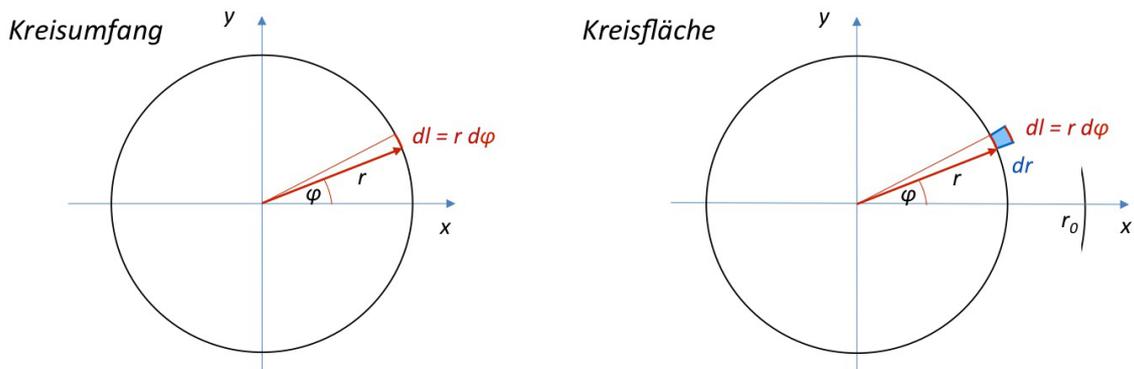
$$\oint dl = \int_{\varphi=0}^{2\pi} r d\varphi = 2\pi r$$

Kreisfläche

Die Kreisfläche berechnet sich aus der Summe der Flächenelemente $dA = r d\varphi dr$

$$\int_A dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^r r dr d\varphi = \pi r^2$$

Folgende Abbildung illustriert das Prinzip.

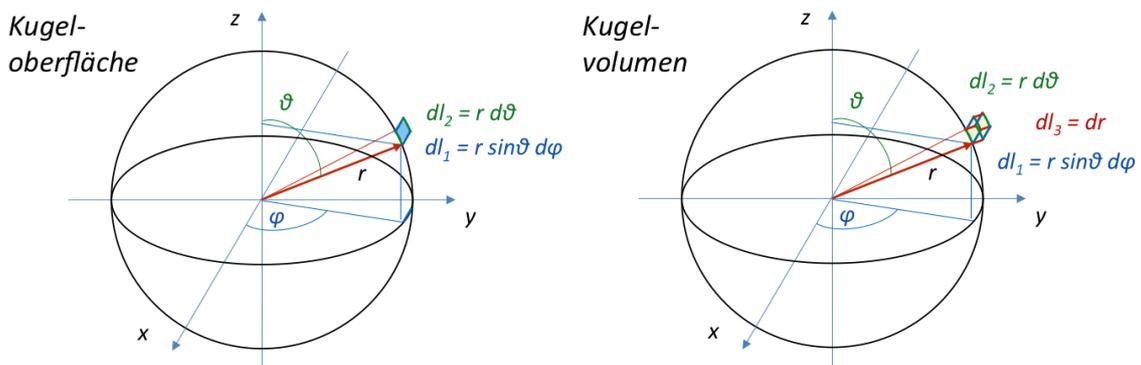


Oberfläche einer Kugel

Die Oberfläche einer Kugel berechnet sich aus den Flächenelementen $dA = (r d\theta) (r \sin(\theta) d\varphi)$ auf der Kugeloberfläche

$$\oint_A dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2$$

Zur Definition des Flächenelementes werden Kugelkoordinaten gewählt, wie in folgender Abbildung gezeigt.



Volumen einer Kugel

Das Volumen einer Kugel berechnet sich aus den Volumenelementen $dV = (r \, d\theta) (r \sin(\theta) \, d\phi) \, dr$ (siehe vorausgegangene Abbildung rechts).

$$\int_V dV = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^r r^2 \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{4\pi}{3} r^3$$

Anhang C – Mathematischer Hintergrund

Gradient

Der Gradient beschreibt die Steigung der skalaren Funktion s im angegebenen Raumpunkt, abhängig vom gewählten Koordinatensystem (kartesisch, polar etc.). In kartesischen Koordinaten wird der Gradient gebildet durch:

$$\nabla s = \text{grad } s = \frac{\partial s}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial s}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial s}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Die Gradient beschreibt ein Vektorfeld (Feldlinien).

Divergenz

Die Divergenz beschreibt die Quelldichte des Vektorfeldes V im angegebenen Raumpunkt, d.h. wie viele Feldlinien in einem Raumpunkt entstehen.

$$\text{div } V = \nabla \cdot V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Die Divergenz ist eine skalare Größe.

Nabla Operator ∇

Der Nabla-Operator ist ein Kürzel für partielle Ableitungsoperationen in vektorieller Schreibweise (z.B. Ableitungen nach den Raumrichtungen in kartesischen Koordinaten):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Hierbei bedeuten \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , und \mathbf{e}_z Einheitsvektoren in den Richtungen x , y , und z (kartesische Koordinaten). Die Divergenz oben ist als Skalarprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld zu verstehen.

Rotation

Die Rotation beschreibt die Wirbelstärke eines Vektorfeldes V im angegebenen Raumpunkt. Die Rotation ist eine vektorielle Größe, ergibt also in jedem Raumpunkt einen Vektor W , der Richtung und Stärke der Wirbel des Vektorfeldes V beschreibt.

$$\text{rot } V = \nabla \times V = \mathbf{e}_x (\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}) + \mathbf{e}_y (\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}) + \mathbf{e}_z (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})$$

Die Rotation lässt sich als Vektorprodukt (Kreuzprodukt) des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld beschreiben.

Laplace Operator Δ

Der Laplace Operator Δ steht als Kürzel für die Operation

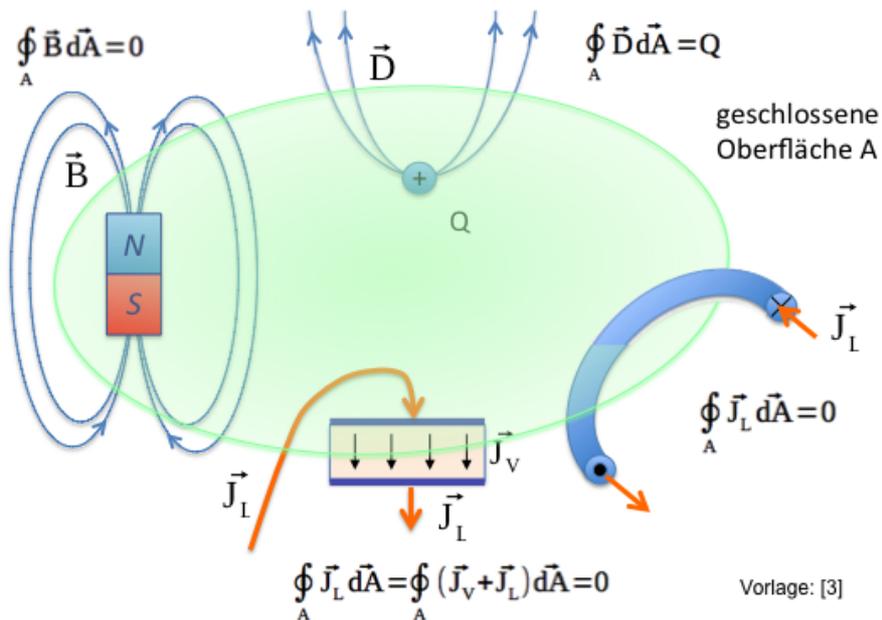
$$\Delta s = \text{div grad } s \quad \text{bzw.}$$

$$\Delta V = \mathbf{e}_x (\text{div grad } V_x) + \mathbf{e}_y (\text{div grad } V_y) + \mathbf{e}_z (\text{div grad } V_z)$$

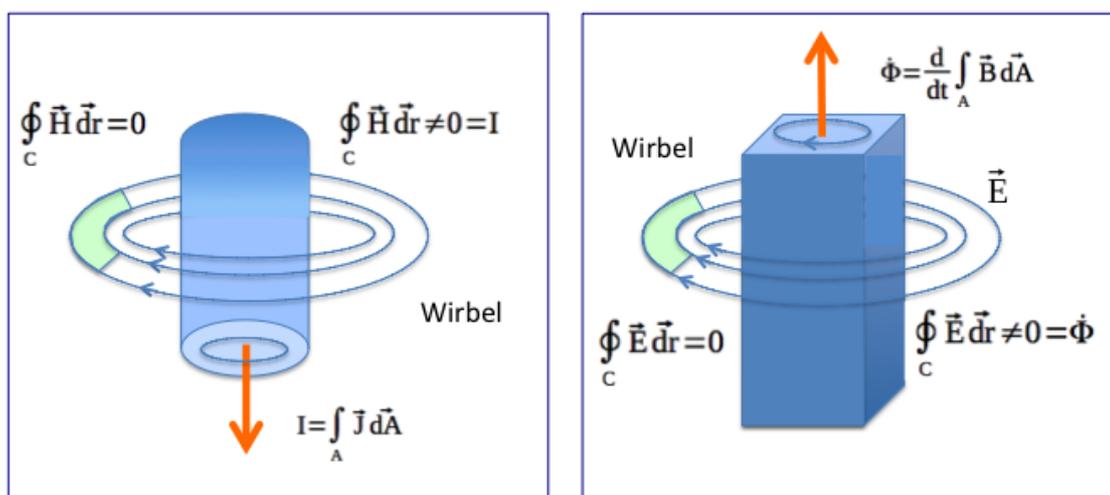
Der Laplace Operator kann sowohl auf eine skalare Größe angewendet werden (z.B. ein skalares Potential) als auch komponentenweise auf einen Vektor (z.B. ein Vektorpotential). Ergebnis ist entweder wiederum eine skalare Größe, oder wiederum ein Vektor.

Anhang D – Interpretation der Maxwell Gleichungen

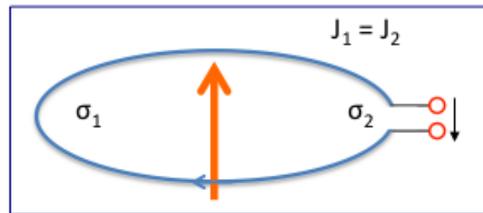
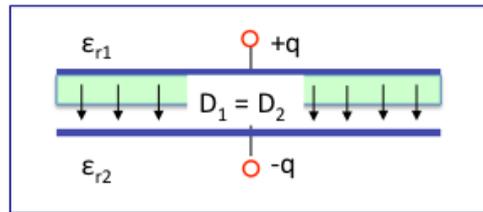
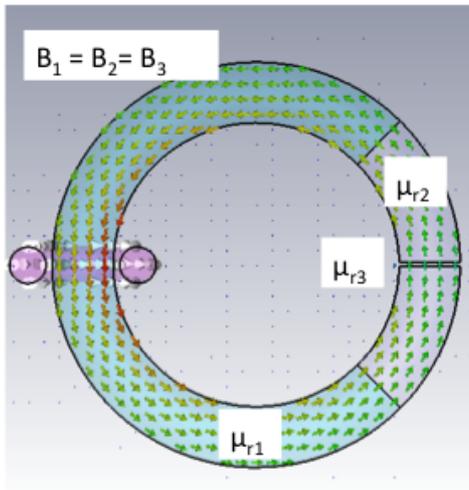
Quellen



Durchflutungsgesetz und Induktionsgesetz



Materialgleichungen an Grenzflächen



Integralgleichungen als Formatvorlagen

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = Q \quad \oint_A \vec{D} d\vec{A} = 0$$

$$\oint_A \vec{J}_L d\vec{A} = 0 \quad \oint_A \vec{J}_L d\vec{A} = \oint_A (\vec{J}_V + \vec{J}_L) d\vec{A} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0 \quad \oint_C \vec{E} d\vec{r} \neq 0 = \Phi \quad \Phi = \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\oint_C \vec{H} d\vec{r} = 0 \quad \oint_C \vec{H} d\vec{r} \neq 0 = I \quad I = \int_A \vec{J} d\vec{A}$$

Anhang E – Maxwell Gleichungen

Elektromagnetische Wellenfelder

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{Durchflutungsgesetz}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{Quellen}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{Materialgleichungen (Flussdichten}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{in Abhängigkeit der Feldstärken)}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Potentiale

In Gebieten mit $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ kann die elektrische Feldstärke als Gradient eines elektrischen Skalarpotentials dargestellt werden:

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} \phi \quad \text{elektrisches Skalarpotential}$$

In Gebieten mit $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ kann die magnetische Feldstärke als Gradient eines magnetischen Skalarpotentials dargestellt werden:

$$\vec{H} = - \operatorname{grad} \phi_m \quad \text{magnetisches Skalarpotential}$$

Bei stromführenden Gebieten innerhalb elektrischer Leiter findet das magnetische Vektorpotential Anwendung:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \text{magnetisches Vektorpotential}$$

Überlagerungsprinzip

Der Einfluss von Gebieten mit unterschiedlichen Voraussetzungen überlagert sich, z.B. die magnetische Feldstärke innerhalb und außerhalb stromführender Leiter.

Elektrische Strömungsfelder

Anwendungsfall: Felder in einem elektrischen Leiter mit zeitlich konstantem Strom

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad \text{Durchflutungsgesetz}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad \text{keine Raumladungen}$$

Somit folgt wegen $\operatorname{div} D = \operatorname{div} \epsilon E = 0$ für das elektrische Potential:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta \phi = 0 \quad \text{Laplace Gleichung}$$

Elektrostatische Felder

Anwendungsfall: Felder in nicht leitenden Materialien ohne zeitliche Änderungen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{Raumladungen}$$

Somit folgt wegen $\operatorname{div} D = \operatorname{div} \epsilon E = \rho$ für das elektrische Potential:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{bzw.} \quad \Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{Poisson Gleichung}$$

Magnetostatische Felder

Anwendungsfall: Felder außerhalb stromführender Bereiche ohne zeitliche Änderungen

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0 \quad \text{Durchflutungsgesetz}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad \text{keine Raumladungen}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Somit folgt wegen $\operatorname{div} B = \operatorname{div} \mu H = 0$ für das magnetische Potential:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi_m = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta \phi_m = 0$$

Quasistationäre elektromagnetische Felder

Anwendungsfall: Langsame Felder mit großen Leitungsströmen (d.h. $J \gg \partial D / \partial t$).

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad \text{Durchflutungsgesetz}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Induktionsgesetz}$$

Mit dem Vektorpotential A ergibt sich $B = \mu H = \operatorname{rot} A$ und somit $\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \mu J$. Unter Verwendung der mathematischen Beziehung $\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A$ folgt wegen $\operatorname{div} A = 0$ für das magnetische Vektorpotential:

$$\Delta \vec{A} = -\mu J \quad \text{Magnetisches Vektorpotential}$$

Mit diesem Anwendungsfall lassen sich übliche Schaltungen außerhalb der Hochfrequenz-technik bearbeiten, z.B. Transformatoren und Felder mit Wirbelströmen (siehe elektrisches Wirbelfeld $\operatorname{rot} E$). Vernachlässigt wird jedoch die Induktion magnetischer Wirbelfelder durch die elektrischen Wirbelfelder (siehe $J \gg \partial D / \partial t$ und somit $\operatorname{rot} H = J$ anstelle von $\operatorname{rot} H = J + \partial D / \partial t$).

Im Inneren eines Leiters findet durch die elektrischen Wirbelfelder wegen $J = \sigma E$ eine Stromverdrängung statt, da dort die elektrischen Wirbelfelder dem Quellenfeld des Stroms J entgegenwirkt. In den äußeren Schichten des Leiters verstärken sich die elektrischen Felder (Skin-Effekt).